Interprétation d'un langage sémantique formel

Sémantique 2, L. Roussarie

2007

1 Sémantique de LCP

Définition 1 (Modèle)
Un modèle (minimal) est un couple $\langle \mathcal{A}, F \rangle$, où $\mathcal{A}$ est un ensemble d'individu (c'est le domaine) et F est une fonction qui à chaque constante et prédicat du langage associe sa dénotation dans le modèle (F est la fonction d'interprétation).

Notation 1
Soit α une expression interprétable quelconque (de LCP).
$[\![\alpha]\!]$ représente la **valeur sémantique** de l'expression α.

Notation 2
Soit α une expression interprétable quelconque (de LCP) et $\mathcal{M}$ un modèle.
$[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}$ représente la **dénotation** de α *relativement* au modèle $\mathcal{M}$.

Définition 2 (Interprétation des constantes non logiques)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

1. Si a est une constante d'individu, alors $[\![a]\!]^{\mathcal{M}} = F(a)$; ie l'individu de $\mathcal{A}$ assigné à a par F.
2. Si P est une constante de prédicat, alors $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} = F(P)$; ie un ensemble d'individus de $\mathcal{A}$ si P est unaire, un ensemble de couples d'individus de $\mathcal{A}$ si P est binaire, etc.

Définition 3 (Interprétation des formules)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

(Sem.1) a. $[\![P(a)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![a]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
b. $[\![P(a,b)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![a]\!]^{\mathcal{M}}, [\![b]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
c. $[\![P(a,b,c)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![a]\!]^{\mathcal{M}}, [\![b]\!]^{\mathcal{M}}, [\![c]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
d. etc.

(Sem.2) $[\![\alpha = \beta]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\beta]\!]^{\mathcal{M}}$.

(Sem.3) $[\![\neg\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(Sem.4) a. $[\![[\phi \wedge \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *et* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
b. $[\![[\phi \vee \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
c. $[\![[\phi \rightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
d. $[\![[\phi \leftrightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.

(Sem.5) a. $[\![\exists v\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi on trouve (au moins) une constante c dans $\mathcal{C}ns_0$ telle que $[\![[c/v]\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
b. $[\![\forall v\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour toute constante c de $\mathcal{C}ns_0$, $[\![[c/v]\phi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

où $[c/v]\phi$ est la formule ϕ dans laquelle on a remplacé toute les occurrences de v par c.
Et on suppose que pour tout individu du domaine $\mathcal{A}$ il y a au moins une constante de LCP qui le dénote.

Exercice 1 (Interprétation dans un modèle)
Soit le modèle $\mathcal{M} = \langle A, F\rangle$, défini comme suit.

A = {Thésée ; Hippolyta ; Hermia ; Héléna ; Lysandre ; Démétrius ; Egée ; Puck ; Obéron ; Titania ; Bottom}

$F(\mathbf{t}_1)$ = Thésée, $F(\mathbf{h}_1)$ = Hippolyta, $F(\mathbf{h}_2)$ = Hermia, $F(\mathbf{h}_3)$ = Héléna, $F(\mathbf{l})$ = Lysandre, $F(\mathbf{d})$ = Démétrius, $F(\mathbf{e})$ = Egée, $F(\mathbf{p})$ = Puck, $F(\mathbf{o})$ = Obéron, $F(\mathbf{t}_2)$ = Titania, $F(\mathbf{b})$ = Bottom

$$F(\mathbf{aimer}) = \left\{\begin{array}{l}\langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta}\rangle \ ; \\ \langle \text{Hippolyta}, \text{Thésée}\rangle \ ; \\ \langle \text{Lysandre}, \text{Hermia}\rangle \ ; \\ \langle \text{Hermia}, \text{Lysandre}\rangle \ ; \\ \langle \text{Démétrius}, \text{Hermia}\rangle \ ; \\ \langle \text{Héléna}, \text{Démétrius}\rangle \ ; \\ \langle \text{Titania}, \text{Bottom}\rangle \end{array}\right\}$$

$$F(\mathbf{elfe}) = \{\text{Obéron ; Titania ; Puck}\}$$
$$F(\mathbf{\hat{a}ne}) = \{\text{Bottom}\}$$
$$F(\mathbf{farceur}) = \{\text{Thésée ; Obéron ; Titania ; Puck}\}$$
$$F(\mathbf{triste}) = \{\text{Héléna}\}$$
$$F(\mathbf{mari\text{-}de}) = \left\{\begin{array}{l}\langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta}\rangle \ ; \\ \langle \text{Obéron}, \text{Titania}\rangle \end{array}\right\}$$
$$F(\mathbf{p\grave{e}re\text{-}de}) = \{\langle \text{Egée}, \text{Hermia}\rangle\}$$

1. Calculez (en justifiant vos résultats) la dénotation dans $\mathcal{M}$ des formules suivantes :

(1) $[\mathbf{aimer}(\mathbf{l}, \mathbf{h}_2) \lor \mathbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h}_3)]$

(2) $[\mathbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h}_2) \land \exists x\, \mathbf{aimer}(x, \mathbf{d})]$

(3) $\forall x[\mathbf{elfe}(x) \to \mathbf{farceur}(x)]$

(4) $\exists x \exists y \exists z[\mathbf{p\grave{e}re\text{-}de}(z, y) \land \mathbf{aimer}(x, y)]$

2. Dites si les phrases suivantes sont vraies ou fausses par rapport au modèle $\mathcal{M}$. Vous justifierez vos réponses *informellement* (c'est-à-dire en français et sans trop entrer dans les détails).

(5) Tous les maris aiment leur femme.

(6) Si on est aimé de personne, alors on est triste.

(7) Tout âne est aimé.

(8) Il est faux que Hippolyta n'aime pas Thésée.

3. Dites comment doit-on modifier le modèle $\mathcal{M}$ pour qu'il représente une configuration du monde telle que : Obéron et Titania s'aiment (mutuellement), Héléna et Démétrius s'aiment (mutuellement), Démétrius n'aime plus Hermia, Héléna n'est pas triste, et Bottom n'est pas un âne, mais un charpentier.

Corrigé

Exercice 1

1. Calcul formel (et détaillé) des dénotations des formules (1–4).

(1) $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{l},\mathbf{h}_2)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, car $F(\mathbf{l}) =$ Lysandre, $F(\mathbf{h}_2) =$ Hermia, et $\langle \text{Lysandre}, \text{Hermia}\rangle \in F(\textbf{aimer})$. Et comme la formule est une disjonction, il suffit qu'un de ses membres soit vrai pour que l'ensemble soit vrai. Donc $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{l},\mathbf{h}_2) \vee \textbf{aimer}(\mathbf{d},\mathbf{h}_3)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

(2) $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{d},\mathbf{h}_2)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, car $F(\mathbf{d}) =$ Démétrius, et $\langle \text{Démétrius}, \text{Hermia}\rangle \in F(\textbf{aimer})$. Ensuite $[\![\exists x\, \textbf{aimer}(x,\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ si on arrive à trouver une constante γ telle que $[\![\textbf{aimer}(\gamma,\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$. Essayons avec $\mathbf{h}_3$ (et $F(\mathbf{h}_3) =$ Héléna) ; $\langle \text{Héléna}, \text{Démétrius}\rangle \in F(\textbf{aimer})$, donc $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{h}_3,\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$. Et cela suffit à montrer que $[\![\exists x\, \textbf{aimer}(x,\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$. Enfin la formule (2) est une conjonction, et ses deux membres sont vrais, donc $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{d},\mathbf{h}_2) \wedge \exists x\, \textbf{aimer}(x,\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

(3) $[\![\forall x[\textbf{elfe}(x) \rightarrow \textbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, ssi $[\![\textbf{elfe}(\gamma) \rightarrow \textbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ pour toute constante γ (parmi $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{p}, \mathbf{o}, \mathbf{b}$). On sait d'abord que si γ est différente de $\mathbf{t}_2, \mathbf{o}$ et $\mathbf{p}$, alors $[\![\textbf{elfe}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 0$, car seuls les individus dénotés par ces 3 constantes ($F(\mathbf{t}_2) =$ Titania, $F(\mathbf{o}) =$ Obéron et $F(\mathbf{p}) =$ Puck) appartiennent à $F(\textbf{elfe})$. Or lorsque le premier membre d'une implication est faux, on sait que l'implication est globalement vraie. Donc $[\![\textbf{elfe}(\gamma) \rightarrow \textbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ pour tous les γ différents de $\mathbf{t}_2, \mathbf{o}$ et $\mathbf{p}$. Restent à calculer $[\![\textbf{elfe}(\mathbf{t}_2) \rightarrow \textbf{farceur}(\mathbf{t}_2)]\!]^{\mathcal{M}}$, $[\![\textbf{elfe}(\mathbf{o}) \rightarrow \textbf{farceur}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}}$ et $[\![\textbf{elfe}(\mathbf{p}) \rightarrow \textbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}}$. On sait déjà que lorsque γ est égal à l'une de ces trois constantes, $[\![\textbf{elfe}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, car les trois individus dénotés appartiennent à $F(\textbf{elfe})$. Il appartiennent aussi à $F(\textbf{farceur})$, donc pour ces trois constantes $[\![\textbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, et par conséquent, pour ces constantes, $[\![\textbf{elfe}(\gamma) \rightarrow \textbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, car l'implication entre deux propositions vraies est vraie. Donc $[\![\textbf{elfe}(\gamma) \rightarrow \textbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, pour toute constante γ, ce qui prouve que $[\![\forall x[\textbf{elfe}(x) \rightarrow \textbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

(4) Pour savoir si $\exists x \exists y \exists z[\textbf{père-de}(z,y) \wedge \textbf{aimer}(x,y)]$ est vraie, il faut trouver trois constantes α, β et γ telles que $[\![\textbf{père-de}(\gamma,\beta) \wedge \textbf{aimer}(\alpha,\beta)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$. Essayons avec $\alpha = \mathbf{l}$, $\beta = \mathbf{h}_2$ et $\gamma = \mathbf{e}$ (avec $F(\mathbf{e}) =$ Egée). $[\![\textbf{père-de}(\mathbf{e},\mathbf{h}_2)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ car $\langle \text{Egée}, \text{Hermia}\rangle \in F(\textbf{père-de})$. $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{l},\mathbf{h}_2)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, on l'a déjà montré en (1). Donc $[\![\textbf{père-de}(\mathbf{e},\mathbf{h}_2) \wedge \textbf{aimer}(\mathbf{l},\mathbf{h}_2)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, car c'est une conjonction et ses deux membres sont vrais. Par définition, cela suffit à montrer que $[\![\exists x \exists y \exists z[\textbf{père-de}(z,y) \wedge \textbf{aimer}(x,y)]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

2.

(5) Cette phrase est fausse, car Obéron est marié avec Titania (cf. $F(\textbf{mari-de})$), mais il ne l'aime pas car $\langle \text{Obéron}, \text{Titania}\rangle \notin F(\textbf{aimer})$. C'est un contre-exemple suffisant pour montrer que la phrase est fausse.

(6) Cette phrase est fausse car il existe au moins un individu, par exemple Puck, qui n'est aimé de personne, selon $F(\textbf{aimer})$, et qui pourtant n'est pas triste (il n'est pas dans $F(\textbf{triste})$).

(7) Cette phrase est vraie. Elle peut se paraphraser par : pour tout individu x, si x est un âne, alors quelqu'un aime x. Il n'y a qu'un seul âne dans le domaine, c'est Bottom, et Titania aime Bottom. C'est donc vrai pour *tout âne*.

(8) Cette phrase est vraie. La proposition « Hippolyta n'aime pas Thésée » est fausse, puisque ce couple est dans la dénotation de **aimer**. Le « il est faux que » initial pose une négation devant cette proposition, et donc inverse la valeur de vérité.

4. Dans le nouveau modèle, appelons-le $\mathcal{M}'$, ce qui change, c'est uniquement la fonction d'interprétation. $\mathcal{M}' = \langle A, F'\rangle$. Voici comment est définie la nouvelle fonction F'.

Pour les valeurs assignées aux constantes d'individus, F' est identique à F. Ensuite, pour les prédicats ;

$$F(\textbf{aimer}) = \left\{\begin{matrix} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta}\rangle \ ; \\ \langle \text{Hippolyta}, \text{Thésée}\rangle \ ; \\ \langle \text{Lysandre}, \text{Hermia}\rangle \ ; \\ \langle \text{Hermia}, \text{Lysandre}\rangle \ ; \\ \langle \text{Démétrius}, \text{Héléna}\rangle \ ; \\ \langle \text{Héléna}, \text{Démétrius}\rangle \ ; \\ \langle \text{Obéron}, \text{Titania}\rangle \ ; \\ \langle \text{Titania}, \text{Obéron}\rangle \ ; \\ \langle \text{Titania}, \text{Bottom}\rangle \end{matrix}\right\}$$

$$\begin{aligned} &F(\textbf{elfe}) = \{\text{Obéron ; Titania ; Puck}\} \\ &F(\textbf{âne}) = \emptyset \\ &F(\textbf{farceur}) = \{\text{Thésée ; Obéron ; Titania ; Puck}\} \\ &F(\textbf{triste}) = \emptyset \\ &F(\textbf{mari-de}) = \left\{\begin{matrix} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta}\rangle \ ; \\ \langle \text{Obéron}, \text{Titania}\rangle \end{matrix}\right\} \\ &F(\textbf{père-de}) = \left\{\langle \text{Egée}, \text{Hermia}\rangle\right\} \\ &F(\textbf{charpentier}) = \{\text{Bottom}\} \end{aligned}$$