

Syntaxe et interprétation d'un langage sémantique formel

Sémantique formelle, L. Roussarie

2014

1 Syntaxe

On définit le langage formel, ou langage objet, LO comme suit.

Définition 1 (Vocabulaire)

Le vocabulaire de LO comporte :

- un ensemble de constantes d'individus : $Cns_0 = \{\mathbf{a} ; \mathbf{b} ; \mathbf{c} ; \mathbf{d} ; \dots ; \mathbf{a}_1 ; \mathbf{a}_2 ; \mathbf{a}_3 ; \dots ; \mathbf{b}_1 ; \mathbf{b}_2 ; \dots\}$;
- un ensemble de variables : $Var = \{x ; y ; z ; x_1 ; x_2 ; \dots ; y_1 ; y_2 ; \dots\}$;
- un ensemble de constantes de prédicats : $\{\text{acteur} ; \text{gentil} ; \text{dormir} ; \text{canard} ; \text{aimer} ; \text{connaître} ; \text{donner} ; \dots\}$;
- un ensemble de symboles logiques : $\{\neg ; \wedge ; \vee ; \rightarrow ; \leftrightarrow ; = ; \forall ; \exists\}$;
- les crochets $[\]$ et les parenthèses $()$.

Définition 2 (Argument)

On appelle **argument** d'un prédicat ce à quoi s'applique ou ce que concerne le prédicat.

Définition 3 (Arité)

On appelle **arité** d'un prédicat le nombre d'arguments qu'il prend. Ainsi, si un prédicat attend n arguments, on dit que son arité est n ; on dit aussi que le prédicat est n -aire, ou encore qu'il s'agit d'un prédicat à n places.

Un prédicat donné a une et une seule arité ; l'arité est une caractéristique déterminante des prédicats.

On suppose que l'on connaît l'arité (la valence) de chaque constante de prédicat.

Définition 4 (Constantes non logiques)

Cns_n est l'ensemble des constantes de prédicats d'arité n dans LO.

L'ensemble des constantes non logiques est $Cns = Cns_0 \cup Cns_1 \cup Cns_2 \cup Cns_3 \cup \dots$

Définition 5 (Termes)

Les variables et les constantes d'individus sont des **termes**.

Définition 6 (Syntaxe)

- (Syn.1)
- Si α est un terme et $P \in Cns_1$ un symbole de prédicat à une place, alors $P(\alpha)$ est une formule ;
 - Si α et β sont des termes et P un symbole de prédicat à deux places, alors $P(\alpha, \beta)$ est une formule ;
 - Si α, β et γ sont des termes et P un symbole de prédicat à trois places, alors $P(\alpha, \beta, \gamma)$ est une formule ;
 - etc.

(Syn.2) Si α et β sont des termes, alors $\alpha = \beta$ est une formule ;

- (Syn.3) Si φ est une formule, alors $\neg\varphi$ est une formule ;
 (Syn.4) Si φ et ψ sont des formules, alors $[\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi \vee \psi]$, $[\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\varphi \leftrightarrow \psi]$ sont des formules ;
 (Syn.5) Si φ est une formule et v une variable, alors $\forall v\varphi$ et $\exists v\varphi$ sont des formules.

2 Sémantique

Définition 7 (Modèle)

Un modèle (minimal) est un couple $\langle \mathcal{A}, F \rangle$, où \mathcal{A} est un ensemble d'individu (c'est le domaine) et F est une fonction qui à chaque constante et prédicat du langage associe sa dénotation dans le modèle (F est la fonction d'interprétation).

Notation 1

Soit α une expression interprétable quelconque (de LO).
 $\llbracket \alpha \rrbracket$ représente la **valeur sémantique** de l'expression α .

Notation 2

Soit α une expression interprétable quelconque (de LO) et \mathcal{M} un modèle.
 $\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}}$ représente la **dénotation** de α *relativement* au modèle \mathcal{M} .

Définition 8 (Interprétation des constantes non logiques)

Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

1. Si a est une constante d'individu, alors $\llbracket a \rrbracket^{\mathcal{M}} = F(a)$; ie l'individu de \mathcal{A} assigné à a par F .
2. Si P est une constante de prédicat, alors $\llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}} = F(P)$; ie un ensemble d'individus de \mathcal{A} si P est unaire, un ensemble de couples d'individus de \mathcal{A} si P est binaire, etc.

Définition 9 (Interprétation des formules)

Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

- (Sem.1) a. $\llbracket P(a) \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket a \rrbracket^{\mathcal{M}} \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$;
 b. $\llbracket P(a, b) \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle \llbracket a \rrbracket^{\mathcal{M}}, \llbracket b \rrbracket^{\mathcal{M}} \rangle \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$;
 c. $\llbracket P(a, b, c) \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle \llbracket a \rrbracket^{\mathcal{M}}, \llbracket b \rrbracket^{\mathcal{M}}, \llbracket c \rrbracket^{\mathcal{M}} \rangle \in \llbracket P \rrbracket^{\mathcal{M}}$;
 d. etc.
- (Sem.2) $\llbracket \alpha = \beta \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket \alpha \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket \beta \rrbracket^{\mathcal{M}}$.
- (Sem.3) $\llbracket \neg\varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 0$.
- (Sem.4) a. $\llbracket [\varphi \wedge \psi] \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ et $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$.
 b. $\llbracket [\varphi \vee \psi] \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ou $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$.
 c. $\llbracket [\varphi \rightarrow \psi] \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 0$ ou $\llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$.
 d. $\llbracket [\varphi \leftrightarrow \psi] \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = \llbracket \psi \rrbracket^{\mathcal{M}}$.
- (Sem.5) a. $\llbracket [\exists v\varphi] \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi on trouve (au moins) une constante κ dans $\mathcal{C}ns_0$ telle que $\llbracket [\kappa/v]\varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$
 b. $\llbracket [\forall v\varphi] \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour toute constante κ de $\mathcal{C}ns_0$, $\llbracket [\kappa/v]\varphi \rrbracket^{\mathcal{M}} = 1$
 où $[\kappa/v]\varphi$ est la formule φ dans laquelle on a remplacé toute les occurrences de v par κ .
 Et on suppose que pour tout individu du domaine \mathcal{A} il y a au moins une constante de LO qui le dénote.