Syntaxe et interprétation d'un langage sémantique formel

Sémantique formelle, L. Roussarie

2013

1 Syntaxe

On définit le langage formel, ou langage objet, LO comme suit.

Définition 1 (Vocabulaire)
Le vocabulaire de LO comporte :
- un ensemble de constantes d'individus : $\mathcal{C}ns_0 = \{\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{b}\ ;\ \mathbf{c}\ ;\ \mathbf{d}\ ;\ \ldots\ ;\ \mathbf{a_1}\ ;\ \mathbf{a_2}\ ;\ \mathbf{a_3}\ ;\ \ldots\ ;\ \mathbf{b_1}\ ;\ \mathbf{b_2}\ ;\ \ldots\}$;
- un ensemble de variables : $\mathcal{V}ar = \{x\ ;\ y\ ;\ z\ ;\ x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ \ldots\}$;
- un ensemble de constantes de prédicats : {**acteur** ; **gentil** ; **dormir** ; **canard** ; **aimer** ; **connaître** ; **donner** ; ...} ;
- un ensemble de symboles logiques : $\{\neg\ ;\ \wedge\ ;\ \vee\ ;\rightarrow;\leftrightarrow;=;\ \forall\ ;\ \exists\}$;
- les crochets [ ] et les parenthèses ( ).

Définition 2 (Argument)
On appelle **argument** d'un prédicat ce à quoi s'applique ou ce que concerne le prédicat.

Définition 3 (Arité)
On appelle **arité** d'un prédicat le nombre d'arguments qu'il prend. Ainsi, si un prédicat attend n arguments, on dit que son arité est n ; on dit aussi que le prédicat est n-aire, ou encore qu'il s'agit d'un prédicat à n places.
Un prédicat donné a une et une seule arité ; l'arité est une caractéristique déterminante des prédicats.

On suppose que l'on connaît l'arité (la valence) de chaque constante de prédicat.

Définition 4 (Constantes non logiques)
$\mathcal{C}ns_n$ est l'ensemble des constantes de prédicats d'arité n dans LO.
L'ensemble des constantes non logiques est $\mathcal{C}ns = \mathcal{C}ns_0 \cup \mathcal{C}ns_1 \cup \mathcal{C}ns_2 \cup \mathcal{C}ns_3 \cup \ldots$

Définition 5 (Termes)
Les variables et les constantes d'individus sont des **termes**.

Définition 6 (Syntaxe)

(Syn.1)
- a. Si α est un terme et $P \in \mathcal{C}ns_1$ un symbole de prédicat à une place, alors $P(\alpha)$ est une formule ;
- b. Si α et β sont des termes et P un symbole de prédicat à deux places, alors $P(\alpha, \beta)$ est une formule ;
- c. Si α, β et γ sont des termes et P un symbole de prédicat à trois places, alors $P(\alpha, \beta, \gamma)$ est une formule ;
- d. etc.

(Syn.2) Si α et β sont des termes, alors $\alpha = \beta$ est une formule ;

(Syn.3) Si φ est une formule, alors $\neg\varphi$ est une formule ;

(Syn.4) Si φ et ψ sont des formules, alors $[\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi \vee \psi]$, $[\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\varphi \leftrightarrow \psi]$ sont des formules ;

(Syn.5) Si φ est une formule et v une variable, alors $\forall v\varphi$ et $\exists v\varphi$ sont des formules.

2 Sémantique

Définition 7 (Modèle)
Un modèle (minimal) est un couple $\langle \mathcal{A}, F\rangle$, où $\mathcal{A}$ est un ensemble d'individu (c'est le domaine) et F est une fonction qui à chaque constante et prédicat du langage associe sa dénotation dans le modèle (F est la fonction d'interprétation).

Notation 1
Soit α une expression interprétable quelconque (de LO).
$[\![\alpha]\!]$ représente la **valeur sémantique** de l'expression α.

Notation 2
Soit α une expression interprétable quelconque (de LO) et $\mathcal{M}$ un modèle.
$[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}$ représente la **dénotation** de α *relativement* au modèle $\mathcal{M}$.

Définition 8 (Interprétation des constantes non logiques)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F\rangle$.

1. Si a est une constante d'individu, alors $[\![a]\!]^{\mathcal{M}} = F(a)$; ie l'individu de $\mathcal{A}$ assigné à a par F.
2. Si P est une constante de prédicat, alors $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} = F(P)$; ie un ensemble d'individus de $\mathcal{A}$ si P est unaire, un ensemble de couples d'individus de $\mathcal{A}$ si P est binaire, etc.

Définition 9 (Interprétation des formules)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F\rangle$.

(Sem.1) a. $[\![P(a)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![a]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;

b. $[\![P(a,b)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![a]\!]^{\mathcal{M}}, [\![b]\!]^{\mathcal{M}}\rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;

c. $[\![P(a,b,c)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![a]\!]^{\mathcal{M}}, [\![b]\!]^{\mathcal{M}}, [\![c]\!]^{\mathcal{M}}\rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;

d. etc.

(Sem.2) $[\![\alpha = \beta]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\beta]\!]^{\mathcal{M}}$.

(Sem.3) $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(Sem.4) a. $[\![[\varphi \wedge \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *et* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

b. $[\![[\varphi \vee \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

c. $[\![[\varphi \rightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

d. $[\![[\varphi \leftrightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.

(Sem.5) a. $[\![\exists v\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi on trouve (au moins) une constante κ dans $\mathcal{C}ns_0$ telle que $[\![[\kappa/v]\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

b. $[\![\forall v\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour toute constante κ de $\mathcal{C}ns_0$, $[\![[\kappa/v]\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

où $[\kappa/v]\varphi$ est la formule φ dans laquelle on a remplacé toute les occurrences de v par κ.
Et on suppose que pour tout individu du domaine $\mathcal{A}$ il y a au moins une constante de LO qui le dénote.