# Quantificateurs généralisés

Laurent Roussarie

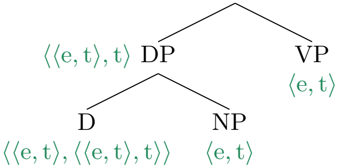
Sémantique, M1 LTD

2014

## $\langle\langle e, t\rangle, \langle\langle e, t\rangle, t\rangle\rangle$

(Montague, 1973) : les DP sont de type $\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$, et donc les déterminants sont de type $\langle\langle e, t\rangle, \langle\langle e, t\rangle, t\rangle\rangle$.

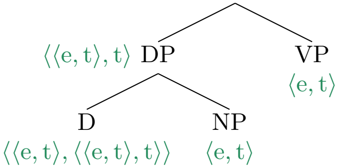
(1)



# $\langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,t\rangle,t\rangle\rangle$

(Montague, 1973) : les DP sont de type $\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$, et donc les déterminants sont de type $\langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,t\rangle,t\rangle\rangle$.

(1)




Les déterminants dénotent des fonctions à deux arguments (de type $\langle e,t\rangle$), qui sont le prédicat nominal (NP) et le prédicat verbal (VP) :

(2) *tous les* $\leadsto \lambda R\lambda P\forall x[[R(x)] \rightarrow [P(x)]]$;

(3) *un* $\leadsto \lambda R\lambda P\exists x[[R(x)] \wedge [P(x)]]$;

(4) *aucun* $\leadsto \lambda R\lambda P\forall x[[R(x)] \rightarrow \neg[P(x)]]$;

(5) *le* $\leadsto \lambda R\lambda P[P(\iota x[R(x)])]$;

# Det dénote une relation entre deux ensembles

Donc, les déterminants dénotent une **relation** entre la dénotation de deux prédicats, c'est-à-dire **entre deux ensembles** d'individus.

(6) *tous les* $\leadsto \lambda R \lambda P \forall x[[R(x)] \rightarrow [P(x)]] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subset [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ ;

(7) *un* $\leadsto \lambda R \lambda P \exists x[[R(x)] \wedge [P(x)]] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g} \neq \varnothing$ ;

(8) *aucun* $\leadsto \lambda R \lambda P \forall x[[R(x)] \rightarrow \neg[P(x)]] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \varnothing$ ;

(9) *le* $\leadsto \lambda R \lambda P[P(\iota x[R(x)])] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ est un singleton et $[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subset [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}$.

# Det dénote une relation entre deux ensembles

Donc, les déterminants dénotent une **relation** entre la dénotation de deux prédicats, c'est-à-dire **entre deux ensembles** d'individus.

(6) *tous les* $\leadsto \lambda R \lambda P \forall x[[R(x)] \rightarrow [P(x)]] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subset [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ ;

(7) *un* $\leadsto \lambda R \lambda P \exists x[[R(x)] \wedge [P(x)]] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g} \neq \varnothing$ ;

(8) *aucun* $\leadsto \lambda R \lambda P \forall x[[R(x)] \rightarrow \neg[P(x)]] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \varnothing$ ;

(9) *le* $\leadsto \lambda R \lambda P[P(\iota x[R(x)])] \iff [\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ est un singleton et $[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subset [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}$.

Généralisons...

# Quantificateurs généralisés

## Constantes de type $\langle\langle e, t\rangle, \langle\langle e, t\rangle, t\rangle\rangle$

(Barwise and Cooper, 1981)
(Keenan and Stavi, 1986)
(Westerståhl, 1989)

### Principe

Représentons les déterminants directement par des **constantes** (i.e. des prédicats/fonctions) de type $\langle\langle e, t\rangle, \langle\langle e, t\rangle, t\rangle\rangle$.

Ces constantes sont des **quantificateurs généralisés**.
C'est formellement équivalent, mais plus expressif.

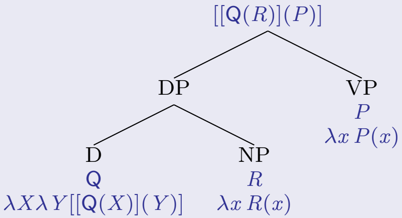
# Quantificateurs généralisés

## Notation

Soit $\mathsf{Q}$ une constante de type $\langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,t\rangle,t\rangle\rangle$ et $R$ et $P$ deux prédicats de type $\langle e,t\rangle$,

$$[[\mathsf{Q}(R)](P)]$$

est la représentation sémantique de la structure syntaxique :




On simplifiera la notation (exceptionnellement) en : $\mathsf{Q}(R)(P)$ ou $[\mathsf{Q}(R)(P)]$

# Restriction et Portée

$$\mathsf{Q}(R)(P)$$

## Terminologie

Le premier argument, i.e. le prédicat (nominal) $R$, s'appelle la **restriction** du quantificateur $\mathsf{Q}$ ; le second argument, i.e. le prédicat (verbal) $P$ s'appelle la **portée nucléaire** (ou simplement portée) de $\mathsf{Q}$.

# Restriction et Portée

$$\mathsf{Q}(R)(P)$$

## Terminologie

Le premier argument, i.e. le prédicat (nominal) $R$, s'appelle la **restriction** du quantificateur $\mathsf{Q}$ ; le second argument, i.e. le prédicat (verbal) $P$ s'appelle la **portée nucléaire** (ou simplement portée) de $\mathsf{Q}$.

$$\mathsf{Quantificateur}(\mathit{Restriction})(\mathit{Portée})$$

# Vers un grand inventaire

- On peut concevoir (mathématiquement) énormément de relations entre deux ensembles.
- On dispose (au moins potentiellement) d'une grande collection de quantificateurs généralisés, i.e. de déterminants.

(10) $[\![\mathbf{tout}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subset [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}$

(11) $[\![\mathbf{un}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g} \neq \varnothing$

(12) $[\![\mathbf{aucun}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \varnothing$

# Vers un grand inventaire
suite

Maintenant LO sait compter !

(13) $[\![\mathbf{deux}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq 2$

(14) $[\![\mathbf{trois}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq 3$

(15) $[\![\mathbf{plusieurs}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| > 1$

- Dans le modèle, on connaît :
  - $|E|$ = le cardinal de l'ensemble $E$ (son nombre d'éléments);

# Vers un grand inventaire

## suite

Maintenant LO sait compter !

(13) $[\![\mathbf{deux}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq 2$

(14) $[\![\mathbf{trois}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq 3$

(15) $[\![\mathbf{plusieurs}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| > 1$

(16) $[\![\mathbf{plupart}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi
$|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| > |[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} - [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}|$
c'est-à-dire, ssi
$|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| > \frac{1}{2}|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}|$

- Dans le modèle, on connaît :
  - $|E|$ = le cardinal de l'ensemble $E$ (son nombre d'éléments);
  - $E - F$ = la différence ensembliste $E$ « moins » $F$ (i.e. tous les éléments de $E$ sauf ceux qui appartiennent à $F$).

# Vers un grand inventaire

*Beaucoup de*

*Beaucoup*

(17) a. $[\![\mathbf{bcp_1}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq k|\mathcal{A}|$

b. $[\![\mathbf{bcp_2}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq k|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}|$

c. $[\![\mathbf{bcp_3}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi
$|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq \frac{|[\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}|}{|\mathcal{A}|}|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}|$

$k$ est un coefficient (un pourcentage) déterminé par le contexte.

# Vers un grand inventaire

etc.

(18) $[\![\mathbf{le}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subset [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ et $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}| = 1$

(19) $[\![\mathbf{les}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subset [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ et $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}| > 1$

(20) $[\![\mathbf{moitié}(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \geq \frac{1}{2}|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g}|$

(21) $[\![\mathbf{au.plus.}n(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| \leq n$

(22) $[\![\mathbf{moins.de.}n(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| < n$

(23) $[\![\mathbf{exactement.}n(R)(P)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $|[\![R]\!]^{\mathcal{M},w,g} \cap [\![P]\!]^{\mathcal{M},w,g}| = n$

## Compositionnalité

On a moins de $\beta$-réductions à effectuer, mais ce n'est pas grave.

(24) Tous les enfants dorment.
$\textbf{tout}(\lambda x\, \textbf{enfant}(x))(\lambda x\, \textbf{dormir}(x))$
ou
$\textbf{tout}(\textbf{enfant})(\textbf{dormir})$

(25) Tous les élèves ont appris une poésie.

a. $\textbf{tout}(\textbf{élève})(\lambda x[\textbf{un}(\textbf{poésie})(\lambda y\, \textbf{apprendre}(x, y))])$
b. $\textbf{un}(\textbf{poésie})(\lambda y[\textbf{tout}(\textbf{élève})(\lambda x\, \textbf{apprendre}(x, y))])$

Et on a le droit de panacher :

(26) La plupart des élèves ont appris une poésie.

a. $\textbf{plupart}(\textbf{élève})(\lambda x \exists y[\textbf{poésie}(y) \wedge \textbf{apprendre}(x, y)])$
b. $\exists y[\textbf{poésie}(y) \wedge \textbf{plupart}(\textbf{élève})(\lambda x\, \textbf{apprendre}(x, y))]$

## Propriétés « mathématiques » des déterminants

### Symétrie

Certaines propriétés de relations entre ensembles donnent lieu à des propriétés (ou caractéristiques) de déterminants.

# Propriétés « mathématiques » des déterminants

## Symétrie

Certaines propriétés de relations entre ensembles donnent lieu à des propriétés (ou caractéristiques) de déterminants.

### Symétrie

$\mathsf{Q}$ est symétrique ssi $\mathsf{Q}(R)(P) \equiv \mathsf{Q}(P)(R)$

## Propriétés « mathématiques » des déterminants
### Symétrie

Certaines propriétés de relations entre ensembles donnent lieu à des propriétés (ou caractéristiques) de déterminants.

**Symétrie**

$\mathsf{Q}$ est symétrique ssi $\mathsf{Q}(R)(P) \equiv \mathsf{Q}(P)(R)$

Les indéfinis (et seulement eux) sont symétriques.

(27) Un enfant dort
Il y a un enfant qui dort $\equiv$ il y a un dormeur qui est un enfant

(28) Plusieurs enfants dorment $\equiv$ Plusieurs dormeurs sont des enfants.

(29) Tous les enfants dorment $\not\equiv$ Tous les dormeurs sont des enfants.

# Propriétés « mathématiques » des déterminants

## Conservativité

### Conservativité

$\mathsf{Q}$ est conservatif ssi $\mathsf{Q}(R)(P) \equiv \mathsf{Q}(R)(R \cap P)$

Tous les déterminants des langues naturelles sont conservatifs.
Cela signifie qu'on n'a jamais besoin de regarder l'ensemble $P - R$.

(30) Un enfant dort $\equiv$ Il y a un enfant qui est un enfant qui dort

(31) Tous les enfants dorment $\equiv$ Tous les enfants sont des enfants qui dorment.

# Propriétés « mathématiques » des déterminants

## Conservativité

### Conservativité

$\mathsf{Q}$ est conservatif ssi $\mathsf{Q}(R)(P) \equiv \mathsf{Q}(R)(R \cap P)$

Tous les déterminants des langues naturelles sont conservatifs.
Cela signifie qu'on n'a jamais besoin de regarder l'ensemble $P - R$.

(30) Un enfant dort ≡ Il y a un enfant qui est un enfant qui dort

(31) Tous les enfants dorment ≡ Tous les enfants sont des enfants qui dorment.

*Seul* n'est pas un déterminant :

(32) Seuls les enfants dorment ≢ Seuls les enfants sont des enfants qui dorment.

Car « seuls les enfants sont des enfants qui dorment » peut être vraie si des adultes dorment aussi.

# Propriétés « mathématiques » des déterminants

## Monotonie

### Monotonie croissante à gauche

Supposons que $R \subseteq S$, alors $\mathsf{Q}$ est monotone croissant à gauche ssi $\mathsf{Q}(R)(P) \models \mathsf{Q}(S)(P)$.

Exemple : $[\![\textbf{éléphant}]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subseteq [\![\textbf{animal}]\!]^{\mathcal{M},w,g}$

(33) Deux éléphants dorment $\models$ Deux animaux dorment.

(34) Tous les éléphants dorment $\not\models$ Tous les animaux dorment.

(35) Aucun éléphant ne dort $\not\models$ Aucun animal ne dort.

- $R \subseteq S$ « équivaut » à $R \models S$ (en fait $R(x) \models S(x)$)
- Monotonie croissante = les inférences logiques sont conservées (en. *Upward entailment*)

# Propriétés « mathématiques » des déterminants

## Monotonie

### Monotonie décroissante à gauche

Supposons que $R \subseteq S$, alors $\mathsf{Q}$ est monotone décroissant à gauche ssi $\mathsf{Q}(S)(P) \models \mathsf{Q}(R)(P)$.

(36) Deux animaux dorment $\not\models$ Deux éléphants dorment.

(37) Tous les animaux dorment $\models$ Tous les éléphants dorment.

(38) Aucun animal ne dort $\models$ Aucun éléphant ne dort.

- Monotonie décroissante = les inférences logiques sont **inversées** (en. *Downward entailment*)

# Propriétés « mathématiques » des déterminants

## Monotonie

### Monotonie croissante à droite

Supposons que $P \subseteq S$, alors $\mathsf{Q}$ est monotone croissant à droite ssi $\mathsf{Q}(R)(P) \models \mathsf{Q}(R)(S)$.

Exemple : $[\![$**boire-vodka**$]\!]^{\mathcal{M},w,g} \subseteq [\![$**boire-alcool**$]\!]^{\mathcal{M},w,g}$

(39) Au moins deux invités boivent de la vodka $\models$ Au moins deux invités boivent de l'alcool.

(40) Tous les invités boivent de la vodka $\models$ Tous les invités boivent de l'alcool.

(41) Aucun invité ne boit de la vodka $\not\models$ Aucun invité ne boit de l'alcool.

(42) Au plus deux invités boivent de la vodka $\not\models$ Au plus deux invités boivent de l'alcool.

# Propriétés « mathématiques » des déterminants

## Monotonie

### Monotonie décroissante à droite

Supposons que $P \subseteq S$, alors $\mathsf{Q}$ est monotone décroissant à droite ssi $\mathsf{Q}(R)(S) \models \mathsf{Q}(R)(P)$.

(43) Au moins deux invités boivent de l'alcool $\not\models$ Au moins deux invités boivent de la vodka.

(44) Tous les invités boivent de l'alcool $\not\models$ Tous les invités boivent de la vodka.

(45) Aucun invité ne boit de l'alcool $\models$ Aucun invité ne boit de la vodka.

(46) Au plus deux invités boivent de l'alcool $\models$ Au plus deux invités boivent de la vodka.

# Monotonie décroissante et NPI

- Remarque : la propriété de monotonie (dé)croissante peut concerner d'autres environnements que les quantificateurs généralisés.
  - En général : si $\alpha \models \beta$, alors $C$ est monotone décroissant ssi $C(\beta) \models C(\alpha)$.

# Monotonie décroissante et NPI

- Remarque : la propriété de monotonie (dé)croissante peut concerner d'autres environnements que les quantificateurs généralisés.
  - En général : si $\alpha \models \beta$, alors $C$ est monotone décroissant ssi $C(\beta) \models C(\alpha)$.
- NPI = *Negative Polarity Items* (termes à polarité négative)
  Exemples : *any*, *ever*, *at all*, *quoi que ce soit*, *jamais*, *du tout*...

## Monotonie décroissante et NPI

- Remarque : la propriété de monotonie (dé)croissante peut concerner d'autres environnements que les quantificateurs généralisés.
  - En général : si $\alpha \models \beta$, alors $C$ est monotone décroissant ssi $C(\beta) \models C(\alpha)$.
- NPI = *Negative Polarity Items* (termes à polarité négative)
  Exemples : *any*, *ever*, *at all*, *quoi que ce soit*, *jamais*, *du tout*...
- Ces termes sont légitimés sous la portée d'une négation.
  Mais pas seulement. Ils sont légitimés dans un environnement monotone décroissant (Ladusaw, 1980) :

(47) a. Tout élève qui aura compris quoi que ce soit à la conférence reviendra la semaine prochaine.
b. *Tout élève qui aura compris la conférence me demandera quoi que ce soit.

# Référence

Barwise, J. and Cooper, R. (1981).
Generalized quantifiers and natural language.
*Linguistics & Philosophy*, 4:159–219.

Keenan, E. L. and Stavi, J. (1986).
A semantic characterization of natural language determiners.
*Linguistics & Philosophy*, 9:253–326.

Ladusaw, W. A. (1980).
On the notion *Affective* in the analysis of negative-polarity items.
*Journal of Linguistic Research*, 1(2):1–16.

Montague, R. (1973).
The proper treatment of quantification in ordinary English.
In Hintikka, K. J. J., Moravcsik, J. M. E., and Suppes, P., editors, *Approaches to Natural Language*, pages 221–242. Reidel, Dordrecht.

Westerståhl, D. (1989).
Quantifiers in formal and natural languages.
In Gabbay, D. and Guenthner, F., editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume IV, pages 1–131. Reidel, Dordrecht.