et incommode lorsque l'on sera amené à analyser des phrase un peu compliquées, de plus on risquerait d'y perdre en précision, sachant que les langues naturelles, comme le français, comportent leur part inévitable de vague et de polysémie. Pour exprimer des descriptions sémantiques, nous nous devons d'être précis et explicites. C'est pourquoi une méthode couramment employée en sémantique consiste à utiliser un langage symbolique, artificiel et formel dans lequel on formule de manière concise et précise le sens des expressions de la langue que l'on étudie. L'intérêt d'un tel langage, assez éloigné des langues naturelles dans sa structure, est qu'il permet, lorsque l'on en est familier, de lire immédiatement et directement dans ses formulations les conditions de vérité qu'il représente, aussi facilement que l'on voit immédiatement une opération d'addition dans l'écriture mathématique « $4 + 3$ ». D'ailleurs le langage de représentation sémantique que nous allons voir est emprunté aux mathématiques et plus exactement à la logique et ce que l'on appelle le **calcul des prédicats**. On lui donne donc habituellement le nom de langage du calcul des prédicats, mais dans ce manuel nous l'appellerons le **langage objet** ou LO, d'abord pour bien insister sur le fait qu'il sera en grande partie l'objet de notre étude[14], et ensuite parce qu'il sera amené à évoluer au cours des pages jusqu'à s'éloigner un peu de ce que l'on appelle traditionnellement le langage du calcul des prédicats (même s'il en conservera les fondements). Ce chapitre cependant se consacre à la présentation des bases classiques du calcul des prédicat, d'où les intitulés du chapitre et de la section qui suit. Une des tâches de la description sémantique va donc maintenant consister à traduire des expressions du français dans ce langage formel LO, et pour mener à bien ces opérations de traduction, il nous faut apprendre à « parler couramment le LO ».

2.2 Le langage du calcul des prédicats

Le calcul des prédicats est une branche assez ancienne de la logique classique[15], mais il a commencé à être formalisé, au moyen de systèmes d'écriture symbolique, appelés aussi des idéographies, à partir de la fin du XIX^e^ et au début du XX^e^ siècle, notamment par les travaux de C. Pierce, G. Frege, G. Peano, B. Russell et de bien d'autres par la suite. Ce type de langages visait surtout à exprimer sans équivoque des énoncés mathématiques et à formaliser des principes de logique. Mais son application à la représentation du sens des phrases (plus ou moins courantes) des langues naturelles fut également assez précoce et prit un essor important à partir années 1960 notamment (mais pas seulement) avec les travaux de R. Montague. Montague, qui était philosophe et logicien, et bien qu'il ne s'inscrivait pas du tout dans le cadre de la grammaire générative, a eu un rôle important dans le développement de la linguistique formelle (et plus exactement la sémantique formelle) telle qu'a pu l'initier Chomsky. Chomsky a défendu la thèse que le langage naturel peut être traité (ie analysé) comme un système formel ; Montague est allé plus loin dans

[14] Pour être tout à fait exact, l'objet de notre étude sémantique ici est également, et probablement avant tout, le français. Mais nous étudierons la sémantique du français par l'intermédiaire du langage symbolique LO, qui fera l'objet d'observations et de commentaires.

[15] Il est déjà présent chez Aristote et dans la syllogistique médiévale.

cette idée en posant que le langage naturel peut être traité comme un système formel *interprété*[16], c'est-à-dire un système muni d'une sémantique (ce qu'avait écarté Chomsky). Et ce système est bien sûr celui du calcul des prédicats. Les théories d'analyse sémantique développées par Montague[17] sont regroupées aujourd'hui sous le nom de *Grammaire de Montague* (il s'agit plus d'une famille de grammaires que d'un formalisme unique). Et c'est dans ce paradigme d'analyse sémantique que se place le présent manuel.

Comme nous l'avons vu plus haut, l'analyse sémantique consiste donc à expliciter les conditions de vérité des phrases de la langue en les formulant dans le langage formel du calcul des prédicats. Comme tout langage, bien que celui-ci soit artificiel, il possède une syntaxe et une sémantique. C'est ce que vont présenter les sections qui suivent, d'abord informellement (§ 2.2.1 et 2.3.1) puis de façon plus rigoureuse (§ 2.2.2 et 2.3.3).

2.2.1 Les éléments du langage formel

2.2.1.1 Prédicats

Comme son nom l'indique, le langage du calcul des prédicats repose fondamentalement sur la notion de... **prédicat**. Dans la perspective que nous adoptons ici, qui va consister à traduire (ou transcrire) le sens de phrases du français dans un langage formel (LO), les prédicats seront les symboles par lesquels on traduira les *verbes*, les *noms communs* (substantifs), les *adjectifs*. On utilisera souvent aussi les prédicats pour traduire directement les tournures attributives de la forme « *être Adj* » et « *être (un) N* ». Voici quelques exemples de matériaux linguistiques qui seront traduits par des prédicats :

(9)	... est gentil	... dort
	... est un canard	... a faim
	... est (un) acteur	... fume
	... est ventru	... aime ...
	... est italien	... connaît ...
	... est le frère de ...	... embrasse ...

D'un point de vue plus général, les prédicats seront définis ici comme ces symboles qui correspondent à des *propriétés* ou des *relations*. Et le propre d'une propriété est d'être *attribuée* à quelque chose, de même qu'une relation *porte sur* des choses. Plus généralement, un prédicat est censé *concerner*, *porter sur* ou encore *s'appliquer à* une ou plusieurs choses. Et ces choses sont ce que l'on appelle les **arguments** du prédicat. Cela transparaît déjà dans la formulation des exemples (9)

[16] La déclaration, presque provocatrice, de Montague que l'on cite souvent à cet égard est :

> *Il n'y a selon moi aucune différence théorique importante entre les langues naturelles et les langages artificiels des logiciens* (Montague, 1970b).

Voir aussi (Bach, 1989, pp. 6–7).

[17] Voir notamment Montague (1970a,b, 1973).

via les points de suspensions : en fait les arguments des prédicats sont « ce qui manque » en (9).

Définition 2.3 (Argument)
On appelle **argument** d'un prédicat ce à quoi s'applique ou ce que concerne le prédicat.

Il apparaît clairement de par la série (9), que la notion d'argument est (à peu de chose près) le pendant sémantique de la notion syntaxique de *complément* (en y incluant le sujet). Et on constate ainsi que la langue naturelle, le français, nous invite à envisager des prédicats qui attendent un argument (*est gentil*, *dort*, etc), pour traduire certains noms et les verbes ou GV intransitifs, et des prédicats qui attendent deux arguments (*aime*, *est le frère de*, etc), pour traduire des constructions transitives. On pourra même considérer des prédicats à trois arguments (... *préfère* ... *à* ...), voire à quatre (... *vend* ... *à* ... *pour* ...) ou plus...

Définition 2.4 (Arité)
On appelle **arité**[18] d'un prédicat le nombre d'arguments qu'il prend. Ainsi, si un prédicat attend n arguments, on dit que son arité est n ; on dit aussi que le prédicat est n-aire[19], ou encore qu'il s'agit d'un prédicat à n places.
Un prédicat donné a une et une seule arité ; l'arité est une caractéristique déterminante des prédicats.

Notation 2.1 (Prédicats)
Dans LO, un prédicat est représenté par un symbole, dit *symbole de prédicat*, et ses arguments sont indiqués à sa suite entre parenthèses[20], séparés par des virgules s'il y en a plusieurs.
Par convention, les symboles de prédicats seront écrits en **gras**. Et, toujours par convention, on utilisera des mots ou des abréviations de mots de la langue pour représenter ces symboles dans LO.

Voici par exemple comment l'on peut traduire dans LO les expressions de (9) – pour l'instant je n'y représente pas explicitement les arguments, à la place je note, provisoirement, un espace vide, ␣, à l'endroit qui leur est réservé :

(9)′	**gentil**(␣)	**dormir**(␣)
	canard(␣)	**avoir-faim**(␣)
	acteur(␣)	**fumer**(␣)
	ventru(␣)	**aimer**(␣, ␣)
	italien(␣)	**connaître**(␣, ␣)
	frère-de(␣, ␣)	**embrasser**(␣, ␣)

[18] On trouve également le terme de *valence* pour désigner cette propriété.
[19] En particulier, pour $n = 1$ on prononcera *unaire*, pour $n = 2$ *binaire*, pour $n = 3$ *ternaire*, etc.
[20] Il s'agit donc d'une notation de type *fonctionnelle* ; cf. § A.3.1, p. 222. D'ailleurs le terme d'argument se retrouve dans le vocabulaire mathématique concernant les fonctions – ce n'est pas un hasard.

Les symboles de prédicats en (9)′ sont dénommés par des mots du français, mots qui reprennent ceux des expressions de (9). Mais ce n'est là qu'une simple commodité. Pour écrire ces prédicats dans LO, on aurait pu choisir d'emprunter des mots de l'anglais ou du latin, etc., ou même d'utiliser des symboles abstraits comme par exemple G_3, D_1, C_{14}, F_7, A, $\heartsuit$, etc. Cela ne ferait fondamentalement aucune différence. Le choix des noms de symboles pour transcrire les prédicats est complètement *conventionnel* et *arbitraire*. Et c'est simplement pour des raisons pratiques, de transparence et de facilité de lecture, que l'on choisira ici de reprendre des mots du français pour écrire les symboles de prédicats. Il est alors très important de bien faire la distinction entre le (symbole de) prédicat **aimer** (que l'on peut écrire aussi **aimer**(␣, ␣)) et le verbe transitif *aimer*. Car le premier appartient au langage objet LO, alors que le second appartient à la langue naturelle qu'est le français[21]. Pour conclure cette remarque, il faut bien être conscient que, malgré les apparences, ce n'est pas le nom du symbole de prédicat qui porte en soi la sémantique du prédicat qu'il représente, cette sémantique est définie par ailleurs (en § 2.3 *infra*).

La définition 2.4 pose qu'un prédicat donné a une arité fixe. On postule également qu'un prédicat donné de LO a un et un seul sens. Cela a pour conséquence de multiplier le nombre de prédicats susceptibles de traduire un mot donné du français. Par exemple (9)′ donne le prédicat **fumer** (à un argument) pour traduire le verbe intransitif *fumer*, mais *fumer* a aussi un emploi transitif (comme dans « *fumer un cigare* ») qui devra se traduire par un prédicat binaire. Même si ces deux verbes *fumer* sont sémantiquement reliés, on ne pourra pas les traduire par le même prédicat **fumer**, car il doit avoir une arité fixe. C'est pourquoi lorsque l'on a besoin de refléter dans LO la polyvalence ou la polysémie d'un mot du français, on peut adopter une notation qui décore les symboles de prédicat d'indices numériques pour distinguer les différentes acceptions. Ainsi on pourra écrire $\mathbf{fumer_1}$(␣) pour traduire le verbe intransitif (signifiant être un fumeur), $\mathbf{fumer_2}$(␣, ␣) pour le verbe transitif (brûler du tabac en aspirant la fumée), et pourquoi pas $\mathbf{fumer_3}$(␣) pour le sens de dégager de la fumée (« la cheminée fume ») etc. Les indices n'ont aucune signification en soi, ils servent juste à poser des distinctions dans les noms de symboles de prédicats.

2.2.1.2 Constantes d'individus

Les prédicats sont des symboles de LO ; le terme d'argument, quant à lui, ne désigne pas une catégorie de symboles mais plutôt un *rôle* que certains symboles peuvent jouer vis à vis des prédicats. Nous devons maintenant voir quels sont les éléments du langage objet qui peuvent jouer ce rôle. Les exemples précédents nous ont montré que, au moins dans certains cas, les arguments correspondent à des expressions qui dénotent des choses, des personnes, des objets au sens large, ce que l'on regroupe ici sous l'appellation d'**individus**. Dans LO, ces expressions s'appellent

[21] Remarquez que, par conséquent, rien ne nous empêcherait formellement de traduire dans LO par exemple l'adjectif français *gentil* par le symbole de prédicat **méchant** ou par le symbole **manchot** ou encore $\mathbf{schtroumpf_{257}}$... Cela ne poserait aucun problème théorique ; seulement, dans la pratique, nos notations deviendraient alors bêtement obscures.

des **termes**[22]. Il existe deux grands types de termes, et le premier que nous allons regarder est celui des **constantes d'individus**.

Les constantes d'individus sont l'équivalent dans LO des *noms propres* de la langue naturelle. Ainsi, comme un nom propre, un constante désigne directement un individu du monde, à ceci près que nos constantes n'auront pas l'ambiguïté que peuvent avoir certains noms propres comme *Pierre Dupont*, *John Smith* ou *Nathalie Lebrun*, etc. Par définition, chaque constante d'individu a une dénotation unique, et c'est pour cela qu'on l'appelle une constante.

Notation 2.2 (Constantes d'individus)
Dans LO, les constantes d'individus seront notées par des lettres minuscules, prises plutôt au début de l'alphabet[23], et éventuellement complétées par des indices numériques. Elles seront également écrites en **gras**.

Par exemple si l'on souhaite parler des individus suivants : Joey, Chandler, Monica, Phoebe, Rachel, Ross, on pourra les désigner respectivement par les constantes $\mathbf{j}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$. Là encore, le choix des lettres est complètement arbitraire : il se trouve que c'est pratique de reprendre les initiales des prénoms traduits sous formes de constantes, mais on aurait pu tout aussi bien prendre $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$, $\mathbf{a_5}$, $\mathbf{a_6}$.

Remarquez aussi que notre convention d'écriture n'est pas innocente : les constantes d'individus seront notées comme les prédicats, en caractères gras, car en fait les prédicats sont considérés eux aussi comme des constantes ; et on parle alors de constantes prédicatives (ou constantes de prédicats) par opposition aux constantes d'individus. Ces deux types de constantes (c'est-à-dire tout ce que nous écrirons en gras dans LO) sont regroupés sous le terme de **constantes non logiques**[24].

Avec ces premiers éléments de LO, on peut déjà commencer à traduire quelques phrases simples du français (la flèche $\leadsto$ servira à indiquer les traductions du français vers le langage objet). Il suffit pour cela de placer des constantes dans les positions argumentales de prédicats :

(10) a. Joey a faim $\leadsto$ $\mathbf{avoir\text{-}faim}(\mathbf{j})$
b. Joey est acteur $\leadsto$ $\mathbf{acteur}(\mathbf{j})$
c. Chandler fume $\leadsto$ $\mathbf{fumer}(\mathbf{c})$
d. Ross aime Rachel $\leadsto$ $\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1})$

Lorsque l'on fournit des arguments à un prédicat, on dit alors que l'on sature le prédicat, et on obtient une expression qui peut être vraie ou fausse. De telles expressions, qui ont donc bien le type de dénotation des phrases déclaratives, s'appellent des **formules**. Les formules sont les « phrases » de LO.

[22]Ne confondons pas termes et individus : les termes sont des symboles de LO, les individus sont les objets du monde.

[23]Les lettres de la fin de l'alphabet, u, v, w, x, y, z, seront réservées à un autre usage.

[24]Constantes non logiques, car il existe encore d'autres constantes, qui sont les constantes logiques et qui comprennent notamment les symboles de connecteurs et de quantification que nous allons voir en § 2.2.1.3 et § 2.2.1.4.

2.2.1.3 Connecteurs logiques

Certes, pour l'instant, les formules que nous pouvons écrire dans LO sont un peu rudimentaires. Pour gagner en sophistication nous avons besoin d'augmenter notre vocabulaire. Une manière d'obtenir des formules plus complexes est de *combiner* entre elles des formules simples. La manière la plus basique de procéder à ces combinaisons utilise des **connecteurs logiques**. Les connecteurs sont en quelque sorte le pendant en LO des conjonctions de coordination d'une langue comme le français. Mais il sera dès à présent prudent de ne pas trop pousser la comparaison. Car d'une part les connecteurs de LO ne « coordonnent » que des formules, c'est-à-dire des phrases. Et d'autre part, toutes les conjonctions du français ne se traduisent pas forcément par un connecteur logique[25].

Définition 2.5 (Connecteur logique)
Un connecteur logique est un symbole de LO qui permet d'assembler deux formules pour former une nouvelle formule.
Une formule est dite complexe si elle est construite à l'aide d'un ou plusieurs connecteurs.

Les connecteurs que nous allons utiliser dans LO sont au nombre de quatre. Le premier s'appelle la **conjonction**, il sera noté par le symbole $\wedge$ et il traduit la conjonction de coordination *et* du français. On l'appelle d'ailleurs aussi le « et logique », car la conjonction est ce connecteur qui permet de construire une formule (ou phrase) qui sera vraie si et seulement si les formules qu'il connecte sont toutes deux vraies.

Le second connecteur est la **disjonction**, il est noté par le symbole $\vee$ et traduit la conjonction française *ou*. C'est donc le « ou logique », et il construit une formule qui est vraie si au moins l'une des deux formules qu'il connecte est vraie.

Le troisième connecteur est l'**implication** dite **matérielle**. Il traduit notamment la relation de condition que l'on exprime en français avec des structures en *si*..., *alors*... ou simplement *si*..., ... On le note par le symbole $\rightarrow$. Attention : $\rightarrow$ ne se place pas « au même endroit » que *si* en français ; en LO, on place $\rightarrow$ entre deux formules.

Enfin le dernier est l'**équivalence** dite aussi **matérielle**. Il correspond à l'expression française *si et seulement si*, et se note par $\leftrightarrow$ (et on comprend pourquoi ce connecteur est parfois appelé aussi la *bi-implication*). Ce connecteur semble plus approprié pour traduire des énoncés de type mathématique que pour rendre compte de la sémantique de la langue naturelle, dans la mesure où la tournure *si et seulement si* est assez marginale dans le discours courant. Mais nous le retenons malgré tout dans le jeu de nos connecteurs car il sera utile pour formaliser certains éléments de sémantique du français.

Voyons maintenant quelques exemples de phrases que nous pouvons transcrire dans LO au moyen de connecteurs :

[25] Nous reviendrons plus en détail sur l'explication de ce point en § 2.4.1.

(11) a. Ross aime Rachel et Chandler aime Monica.
$\rightsquigarrow [\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{c}, \mathbf{m})]$
b. Si Chandler a faim, il (Chandler) fume.
$\rightsquigarrow [\mathbf{avoir\text{-}faim}(\mathbf{c}) \rightarrow \mathbf{fumer}(\mathbf{c})]$

Notez l'usage des crochets [ ] que nous avons introduit au passage, pour parenthéser chaque connexion de formules. Ces crochets sont d'une grande utilité lorsqu'une formule complexe comprend plusieurs connecteurs, exactement comme en mathématiques les parenthèses sont importantes pour marquer la priorité d'une opération sur une autre ($(4+1) \times 2 \neq 4 + (1 \times 2)$).

La finalité du langage objet est de nous permettre d'expliciter le sens des énoncés, et pas seulement de refléter leur construction syntaxique ou grammaticale. C'est pourquoi les connecteurs vont également nous servir à faire des traductions analytiques comme en (12).

(12) a. Joey est un acteur italien.
$\rightsquigarrow [\mathbf{acteur}(\mathbf{j}) \wedge \mathbf{italien}(\mathbf{j})]$
b. Ross et Rachel s'aiment.
$\rightsquigarrow [\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})]$

En effet, la phrase (12a) par exemple nous dit bien conjointement deux choses : que l'individu nommé Joey est acteur *et* qu'il est italien. De même (12b) dit que Ross aime Rachel et que Rachel aime Ross. Notons que (12b) est en fait ambiguë : Ross et Rachel peuvent s'aimer soi-même sans s'aimer l'un l'autre. Dans ce cas on traduira la phrase par $[\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_2}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_1})]$. Cela illustre que LO fait bien son travail d'explicitation du sens des phrases : si une phrase a plusieurs sens, elle reçoit différentes traductions en LO.

Enfin pour compléter au moins minimalement l'expressivité de LO, nous allons avoir besoin de pouvoir traduire des phrases négatives, c'est-à-dire de *nier* des propos ou, plus précisément, des formules. On fabrique des formules négatives dans LO grâce à l'opérateur de **négation** que nous avons déjà vu et qui se note par le symbole $\neg$. Il ne s'agit plus à proprement parler d'un *connecteur* logique : il ne connecte rien, on le place devant une formule pour former sa négation. Mais comme les connecteurs présentés *supra*, la négation « agit » sur des formules et sa contribution sémantique est aussi définie en termes de valeurs de vérité : la négation est cet opérateur qui rend vraies les formules fausses et fausses les formules vraies.

(13) a. Phoebe n'a pas faim.
$\rightsquigarrow \neg\mathbf{avoir\text{-}faim}(\mathbf{p})$
b. Si Chandler dort, il ne fume pas.
$\rightsquigarrow [\mathbf{dormir}(\mathbf{c}) \rightarrow \neg\mathbf{fumer}(\mathbf{c})]$

2.2.1.4 Variables et quantificateurs

Jusqu'ici, dans LO pour parler des individus, de ces choses sur lesquelles on fait porter les prédicats, nous ne disposons que des constantes d'individus, qui rappelons-le sont en quelque sorte les noms propres du langage objet. Or, on s'en doute bien, on peut difficilement se permettre de donner un nom propre à tout individu du monde que l'on souhaiterait évoquer dans des énoncés. Ce ne serait pas très réaliste, car rappelons aussi que nous comptons également les objets inanimés parmi ce que nous appelons ici les individus. Même si certains objets reçoivent les honneurs de l'onomastique (comme par exemple la Tour Effeil, le TGV, Saturne, Durandal, Deep Blue, etc.), la pratique n'est pas courante et surtout absolument pas indispensable. En effet, la langue nous permet d'évoquer des individus, y compris des êtres humains ou animaux, *sans* mentionner leur nom. Soit que l'on ne le connaît pas, soit que l'on n'a pas envie ou pas besoin de faire mention du nom de l'individu en question. On utilise à cet effet des procédés linguistiques évidemment bien connus : c'est l'usage que l'on fait des syntagmes nominaux, comme par exemple *le voisin d'en face*, *un employé de banque*, *les pains au lait*, etc. Et nous devons donc nous donner les moyens dans LO de faire référence aux individus de façon similaire.

Pour ce faire, nous avons d'abord besoin d'un autre type de termes, les **variables**. Comme les constantes, les variables dénotent des individus. Mais alors qu'une constante donnée dénotera toujours le même individu précis, par un lien conventionnel et permanent, une variable permettra de désigner tout et n'importe quoi, sans contrainte particulière *a priori*. D'où leur nom, variables, car ce qu'elles désignent peut varier librement *a priori*. « *A priori* » signifie que si ce que désigne une variable est contraint dans une phrase, ce n'est pas la variable en soi qui pose cette contrainte. Ou pour dire encore les choses autrement, on sait qu'une variable est censée dénoter quelque chose, mais on ne sait pas quoi, du moins pas systématiquement. C'est pourquoi les variables de LO fonctionnent un peu comme les pronoms personnels de la langue naturelle (et plus précisément les pronoms de troisième personne, *il*, *elle*, *le*, *lui*, etc.).

Notation 2.3 (Variables)
Dans LO, les variables seront notées par des lettres, de préférence minuscules, en italiques, prises à la fin de l'alphabet : principalement x, y, z, mais aussi parfois u, v, w. Elles pourront être éventuellement complétées d'indices numériques : x_1, x_2, x_3, y_1..., ou de « primes » : x', x''...

Voici alors une manière simple de traduire dans LO une phrase française contenant un pronom personnel[26] :

(14) Il dort. $\rightsquigarrow$ $\mathbf{dormir}(x)$

[26]Notez cependant que contrairement aux pronoms du français, les variables de LO ne portent pas le trait grammatical de genre.

Cependant les variables ne vont pas être utilisées seulement pour traduire les pronoms de la langue dans LO. Elles nous servent à établir des références anonymes aux choses dont on veut parler. Mais pour compenser le manque d'information dû à cet anonymat, nous avons besoin de d'apporter d'autres éléments qui vont contraindre et discipliner la référence des variables. Pour ce faire on utilise des prédicats (comme en (14)), mais aussi des opérateurs logiques particuliers qui imposent aux variables un « mode de variation » précis. Ce sont les **quantificateurs**, qu'on appelle aussi (plus précisément d'ailleurs) les **symboles de quantification**. Les deux quantificateurs de la logique classique (sur laquelle est fondé LO) sont :

- le **quantificateur existentiel**, noté $\exists$, qui impose à une variable de dénoter *au moins un individu* ; ainsi $\exists x$... se lit « il existe un x tel que... » ;
- le **quantificateur universel**, noté $\forall$, qui impose à une variable de dénoter *successivement tous les individus* ; ainsi $\forall x$... se lit « quel que soit x... » ou « pour tout x... ».

Voyons tout de suite des exemples :

(15) a. $\exists x\, \mathbf{acteur}(x) \leadsto$ il existe un x (ie un individu ou une chose quelconque) qui est un acteur ou tel que x est un acteur $\leadsto$ il existe un acteur, ou il y a un acteur.
b. $\exists x\, [\mathbf{acteur}(x) \wedge \mathbf{fume}(x)] \leadsto$ il existe un x qui est un acteur et qui fume $\leadsto$ un acteur fume.
c. $\exists x\, [\mathbf{acteur}(x) \wedge \mathbf{connaître}(\mathbf{m}, x)] \leadsto$ Monica connaît un acteur.
d. $\exists x\, \mathbf{aime}(x, \mathbf{p}) \leadsto$ (il y a quelqu'un qui) quelqu'un aime Phoebe.

(16) a. $\forall x\, \mathbf{avoir\text{-}faim}(x) \leadsto$ quel que soit x, x a faim $\leadsto$ tout le monde à faim.
b. $\forall x\, [\mathbf{acteur}(x) \rightarrow \mathbf{fume}(x)] \leadsto$ quel que soit x, si x est un acteur, alors x fume $\leadsto$ tous les acteurs fument.

Remarquons cependant que (16)a n'est pas une traduction très rigoureuse de « *tout le monde à faim* », car en français *tout le monde* ne concerne que les êtres humains. Pour un bonne traduction, il faut employer un prédicat signifiant « être humain », par exemple **humain**, et écrire $\forall x[\mathbf{humain}(x) \rightarrow \mathbf{avoir\text{-}faim}(x)]$.

2.2.2 La syntaxe du langage formel

Nous allons à présent faire la synthèse que ce que nous venons de voir sur le langage formel LO en définissant précisément ce langage. En particulier nous devons définir précisément comment les éléments vus précédemment s'organisent au sein du langage. Commençons par en redonner la liste, ils forment le *vocabulaire* de notre langage, ses atomes, sa matière première.

Définition 2.6 (Vocabulaire)
Le vocabulaire de LO comporte :

- un ensemble de variables : $\{x\,;\,y\,;\,z\,;\,x_1\,;\,x_2\,;\,\ldots\,;\,y_1\,;\,y_2\,;\,\ldots\}$;
- un ensemble de constantes d'individus : $\{\mathbf{a}\,;\,\mathbf{b}\,;\,\mathbf{c}\,;\,\mathbf{d}\,;\,\ldots\,;\,\mathbf{a_1}\,;\,\mathbf{a_2}\,;\,\mathbf{a_3}\,;\,\ldots\,;\,\mathbf{b_1}\,;\,\mathbf{b_2}\,;\,\ldots\}$;

– un ensemble de constantes de prédicats : {**acteur** ; **gentil** ; **dormir** ; **canard** ; **aimer** ; **connaître** ; ...} ;
– un ensemble de symboles logiques : $\{\neg ; \wedge ; \vee ;\rightarrow;\leftrightarrow;=; \forall ; \exists\}$;
– les crochets [ ] et les parenthèses ( ).

Notons que nous avons ajouté le symbole = parmi les symboles logiques ; il servira à représenter l'identité, c'est-à-dire l'égalité de dénotation.

En principe, les ensembles de variables et de constantes d'individus et de prédicats sont supposés être finis (ce qui est bien raisonnable, on ne va pas manipuler un langage au vocabulaire infini) et être présentés exhaustivement, ce que masque l'usage des points de suspension dans la définition ci-dessus. La tradition « montagovienne »[27] a l'habitude (depuis les travaux de Montague lui-même) de proposer des *fragments* de langage, c'est-à-dire des sous-parties (très) petites *mais complètes* de ce que serait un langage objet réaliste de l'envergure d'une langue naturelle. Procéder par fragments constitue une méthodologie de travail très rigoureuse car tout y est complètement et précisément défini, aucun élément du langage ne risque de rester dans l'ombre ou le vague. Je ne compte pas ici m'autoriser une quelconque mollesse ou désinvolture dans la méthode de travail, simplement, pour des raisons de clarté et de commodité, je me permettrai d'utiliser des ensembles de constantes et de variables « ouverts », c'est-à-dire suffisamment grands pour permettre de la variété dans les exemples de phrases traduites en LO. Autant que faire se peut, chaque nouveau prédicat introduit dont la sémantique ne serait pas immédiate sera explicitement commenté.

Un autre élément d'information attaché au vocabulaire et qui n'apparaît pas dans la définition 2.6 doit être précisé : nous faisons l'hypothèse que pour chaque constante de prédicat nous connaissons son arité, et qu'elle est unique. Cela veut dire que l'ensemble de symboles de prédicat est en fait partionné en plusieurs sous-ensembles (celui des prédicats unaires, celui des prédicats binaires etc.) et que l'on connaît cette partition. Cette hypothèse est importante et précieuse, car dans nos notations rien ne nous indique formellement le nombre d'arguments qu'attend un prédicat[28].

Nous allons également en profiter pour définir tout de suite la notion de *terme*, qui va nous être utile par la suite. Il s'agit juste de regrouper sous une même appellation les variables et les constantes.

Définition 2.7 (Termes)
Les variables et les constantes d'individus sont des **termes**.

Définir un langage, au sens des langages formels, consiste à indiquer, d'une manière ou d'une autre, toutes les séquences correctes qu'admet ce langage. Et bien entendu, la manière que l'on retient consiste à spécifier l'ensemble des règles qui permettent de construire n'importe quelle séquence admissible, c'est-à-dire la *syntaxe* du langage. On reconnaît là, naturellement, la démarche de la grammaire

[27] *Montagovien* signifie relatif à Montague ou à ses travaux.
[28] Nous verrons comment perfectionner tout cela au chapitre 5.

générative, sauf que nous n'allons pas ici exprimer les règles syntaxiques sous formes de règles de réécriture comme dans la tradition chomskienne par exemple, mais par ce que l'on appelle la méthode inductive. Définir une syntaxe par induction consiste à spécifier des règles (ou des « recettes ») qui indiquent comment construire récursivement des formules de plus en plus complexes à partir de formules plus simples que l'on sait déjà construire.

La définition 2.8 présente la syntaxe de LO, et c'est en fait ni plus ni moins que la définition détaillée et complète de ce qu'est une formule de LO. Dans ces règles, j'utilise des lettres grecques, α, β, γ, φ, ψ, ainsi que P pour désigner des expressions plus ou moins quelconques de LO. Ces symboles en soi ne font pas partie de LO (tous les symboles de LO sont donnés par le vocabulaire 2.6), ce sont des sortes de macro-symboles ou méta-symboles qui nous permettent de dire des choses générales sur LO. Ainsi, en toute rigueur, on ne devrait pas dire que φ est une formule, mais que φ représente une formule (cependant, par la suite, nous nous autoriserons quelque liberté de langage en qualifiant φ de formule).

Définition 2.8 (Syntaxe)

(Syn.1)
a. Si α est un terme et P un symbole de prédicat à une place, alors $P(\alpha)$ est une formule ;
b. Si α et β sont des termes et P un symbole de prédicat à deux places, alors $P(\alpha, \beta)$ est une formule ;
c. Si α, β et γ sont des termes et P un symbole de prédicat à trois places, alors $P(\alpha, \beta, \gamma)$ est une formule ;
d. etc.

(Syn.2) Si α et β sont des termes, alors $\alpha = \beta$ est une formule ;

(Syn.3) Si φ est une formule, alors $\neg\varphi$ est une formule ;

(Syn.4) Si φ et ψ sont des formules, alors $[\varphi \wedge \psi], [\varphi \vee \psi], [\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\varphi \leftrightarrow \psi]$ sont des formules ;

(Syn.5) Si φ est une formule et v une variable, alors $\forall v\varphi$ et $\exists v\varphi$ sont des formules.

Il convient ensuite de conclure cet ensemble de règles par une dernière règle de « clôture » qui dit ceci : rien d'autre que ce qui peut être construit par les règles de (Syn.1) à (Syn.5) n'est une formule. Cela permet de garantir que notre syntaxe définit bien *toutes* les formules de LO.

Les règles (Syn.1) sont celles qui permettent de construire les formules les plus simples (dites atomiques) en fournissant aux symboles de prédicat des arguments en quantité nécessaire. La règle (Syn.2) construit aussi des formules simples, qui pose une identité entre deux termes ; en fait le symbole $=$ pourrait tout aussi bien être rangé parmi les prédicats binaires (on devrait alors plutôt écrire $=(\alpha, \beta)$) et (Syn.2) ne présente qu'une variante particulière de ce que recouvre (Syn.1b) ; simplement on préfère utiliser la notation habituelle, plus claire et naturelle, pour le symbole $=$. Les règles (Syn.3) et (Syn.4) introduisent les connecteurs logiques dans la construction des formules ; rappelons que (pour le moment) les crochets [ ] sont indispensables dans (Syn.4). Enfin la (double) règle (Syn.5) introduit les symboles de quantification ; notons que cette règle autorise d'accoler une séquence quantificateur–variable devant n'importe qu'elle formule φ, c'est-à-dire qu'on n'a pas à vérifier si la variable v figure ou non dans φ (nous y reviendrons *infra*).

Illustrons à présent le fonctionnement de notre syntaxe avec un exemple. La syntaxe indique comment construire correctement des formules et en même temps comment reconnaître si des séquences de symboles du vocabulaire de LO sont ou non des formules bien formées (ce que l'on appelle aussi des expressions bien formées ou EBF). Essayons donc de montrer que (17) est bien formée.

(17) $\exists x \forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$

Pour vérifier la bonne formation de (17), il suffit de la reconstruire en appliquant les règles de la syntaxe, et seulement elles, qui sont nécessaires. On peut également déconstruire la formule en appliquant les règles syntaxiques, mais dans l'autre sens, jusqu'à ce que l'on n'obtienne que des éléments du vocabulaire de base. Voici les étapes de construction de (17) :

– **aimer** est un prédicat à deux places, **c** est une constante et x est une variable, donc $\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x)$ est une formule bien formée en vertu de la règle Syn.1b ;
– de même, **gentil** est un prédicat à une place et y est une variable, donc $\mathbf{gentil}(y)$ est une formule bien formée, en vertu de la règle Syn.1a ;
– donc en vertu de la règle Syn.4, avec le connecteur $\wedge$, $[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ est une formule bien formée ;
– donc, comme y est une variable, $\forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ est une formule bien formée, en vertu de la règle Syn.5 pour $\forall$;
– et donc, comme x est une variable, $\exists x \forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ est une formule bien formée, en vertu de la règle Syn.5 pour $\exists$. *qed.*

On peut illustrer graphiquement une telle démonstration à l'aide de ce qu'on appelle l'**arbre de construction** d'une formule. L'arbre de (17) est donné en Figure 2.1. Chaque nœud de l'arbre représente une étape de la construction de la formule, la racine (ou nœud supérieur) correspondant à la formule complète. Chaque branche et embranchement représente l'application d'une règle syntaxique, et les nœuds directement inférieurs dans un embranchement représentent les « ingrédients » à partir desquels on construit ce qui est dans le nœud directement supérieur.

Il y a un théorème qui dit que toute formule bien formée est représentable par un et un seul arbre de construction. Donc pour montrer qu'une séquence donnée est une formule bien formée, il suffit de dessiner son arbre de construction. Et si on n'y parvient pas, c'est que la séquence n'est pas une formule bien formée[29]. Ainsi on peut montrer que (18) n'est pas bien formée, car son arbre de construction complet (Figure 2.2) n'est pas possible.

(18) $\neg\mathbf{aimer}(\mathbf{b}x)$

Aucune règle de la syntaxe ne permet de construire $\mathbf{aimer}(\mathbf{b}x)$; celle qui s'en rapprocherait le plus serait (Syn.1b), mais elle exige de placer une virgule entre deux arguments d'un prédicat binaire.

[29] Ou bien qu'on s'est trompé dans l'analyse !

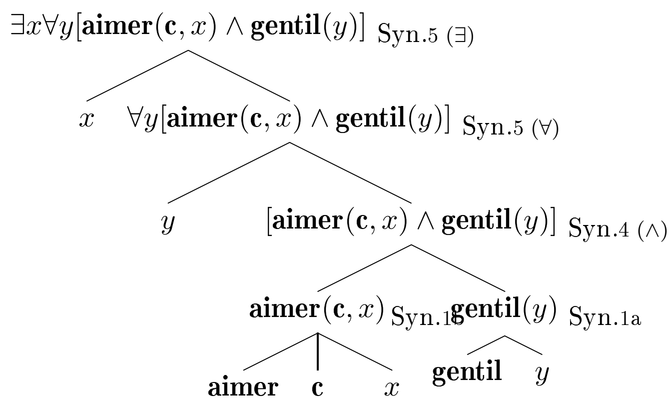

FIG. 2.1 – Arbre de construction de (17)

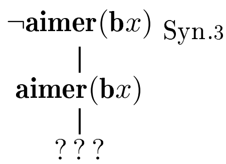

FIG. 2.2 – Echec de la construction de (18)

En revanche, (19) est parfaitement bien formée (comme le prouve l'arbre en Figure 2.3), même si elle semble un peu bizarre ; mais cela n'est (et ne doit) être qu'une impression, car (19) ne pose aucun problème pour le système du calcul des prédicats[30].

(19) $\exists y\, \mathbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

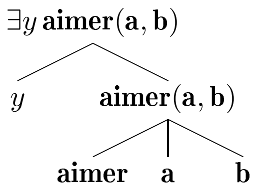

FIG. 2.3 – Arbre de construction de (19)

Le concept d'arbre de construction d'une formule permet de définir facilement une notion qui sera très utile par la suite, celle de **sous-formule** d'une formule. Une sous-formule est tout simplement une formule bien formée que l'on trouve à l'intérieur d'une formule plus grande.

[30]Nous verrons, en examinant la sémantique de LO, que cette formule est en fait équivalente à $\mathbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Définition 2.9 (Sous-formule)
On dit que ψ est une **sous-formule** de la formule φ si et seulement si ψ est une formule qui apparaît dans l'arbre de construction de φ.

Ainsi $\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x)$, $\mathbf{gentil}(y)$, $[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ et $\forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ sont des sous-formules de (17), mais pas $\exists x \forall y\, \mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x)$.

Exercice 2.1
Parmi les séquences suivantes, lesquelles sont des formules correctes de LO ?

1. $\exists z\, [[\mathbf{connaître}(\mathbf{r_2}, z) \wedge \mathbf{gentil}(z)] \wedge \neg \mathbf{dormir}(z)]$
2. $\exists x \forall y \exists z\, [\mathbf{aimer}(y, z) \vee \mathbf{aimer}(z, x)]$
3. $\forall xy\, \mathbf{aimer}(x, y)$
4. $\neg\neg \mathbf{aimer}(\mathbf{r_1}, \mathbf{m})$
5. $\exists x \neg \exists z\, \mathbf{connaître}(x, z)$
6. $\exists x[\mathbf{acteur}(x) \wedge \mathbf{dormir}(x) \vee \mathbf{avoir\text{-}faim}(x)]$
7. $[\mathbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \neg \mathbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$
8. $\exists y[\mathbf{acteur}(x) \wedge \mathbf{dormir}(x)]$

Exercice 2.2
Traduisez dans LO les phrases françaises ci-dessous. Vous choisirez les noms de prédicats et de constantes comme cela vous arrange, mais vous indiquerez à chaque fois ce qu'ils traduisent du français. Si une phrase contient une présupposition, ne traduisez que son contenu asserté (ie non présupposé). On ne tiendra pas compte de valeur sémantique des temps verbaux (on les néglige pour l'instant).

1. Antoine n'est plus barbu.
2. Tout est sucré ou salé.
3. Soit tout est sucré, soit tout est salé.
4. Le chien qui aboie ne mord pas. (proverbe)
5. C'est Marie que Jérôme a embrassé.
6. Il y a des hommes et des femmes qui ne sont pas unijambistes.
7. Tout le monde aime quelqu'un.
8. Si tous les homards sont gauchers alors Alfred aussi est gaucher.
9. Quelqu'un a envoyé une lettre anonyme à Anne.
10. Seule Chloé est réveillée.

Exercice 2.3
Même exercice.

1. Il existe des éléphants roses.
2. Quelque chose me gratouille et me chatouille.
3. Quelque chose me gratouille et quelque chose me chatouille.
4. Nimes est entre Avignon et Montpellier.

5. S'il y a des perroquets ventriloques, alors Jacko en est un.
6. Anne a reçu une lettre de Jean, mais elle n'a rien reçu de Pierre.
7. Tout fermier qui possède un âne est riche.
8. Il y a quelqu'un qui a acheté une batterie et qui est en train d'en jouer.
9. Il y a un seul océan.
10. Personne n'aime personne.

Récapitulons. La syntaxe présentée ici nous permet de faire le tri entre ce qui est une formule correcte de LO et ce qui est une simple séquence écrite n'importe comment avec les éléments du vocabulaire. Les formules correctes, reconnues ou admises par la syntaxe, sont souvent appelées des expressions bien formées (EBF), par opposition à des expressions qui seraient mal formées. Cette discrimination entre expressions bien formées et mal formées n'est pas purement normative ou arbitraire. N'oublions pas que nous sommes en sémantique ; et le but du jeu n'est pas simplement de dire que telle expression est bien écrite et que telle autre ne l'est pas. Ici, la syntaxe anticipe sur la sémantique, car ce que la syntaxe reconnaît comme expressions bien formées sont en fait des expressions qui ont du sens (ie des expressions que l'on peut interpréter). On les appellera alors des **expressions interprétables** (trad. de *meaningful expressions*). Donc si une expression bien formée est une expression qui a un sens, une expression mal formée est une expression à laquelle on ne peut pas (ou on ne saurait pas) attribuer un sens. Remarquons que cela a des implications importantes : qu'une expression mal formée soit non interprétable, cela ne pose guère de problème ; en revanche, ce qui est moins évident, c'est que toute expression que l'on s'autorisera à manipuler dans LO (c'est-à-dire qu'on acceptera comme bien formée) devra obligatoirement être clairement et systématiquement interprétable ; de plus, tout ce que l'on souhaitera interpréter dans notre théorie devra recevoir une écriture (bien formée) dans LO.

Nous allons maintenant voir ce qu'est le sens d'une expression de LO, c'est-à-dire la sémantique de ce langage.

2.3 Interprétation dans le calcul des prédicats

2.3.1 Sémantique informelle

Le sens est ce qui nous permet de trouver la dénotation d'une expression. Donc décrire le sens des expressions revient à spécifier les règles de calcul des dénotations des expressions. La finalité de l'analyse sémantique ici est principalement d'exprimer les conditions de dénotation des formules (leurs conditions de vérité), et comme les formules peuvent être plus ou moins complexes, construites à partir d'éléments plus simples, nous devons d'abord avoir une idée précise de ce que sont les dénotations de ces éléments, c'est-à-dire les expressions de base du langage LO.

Par définition, la dénotation d'une constante d'individu est simplement l'individu (du monde) désigné par cette constante. Par exemple si nous nous intéressons à un individu, humain de sexe masculin, nommé Chandler Bing, etc. nous pourrons choisir de lui faire correspondre le symbole de constante **c** de LO. Et donc nous saurons ainsi que **c** dénote cet individu particulier.

Venons-en à la dénotation des prédicats et d'abord des prédicats à une place comme **acteur**. Rappelons que la dénotation est en quelque sorte la projection dans le monde de ce que « vaut » l'expression. Le prédicat **acteur** traduit le substantif français *acteur*, il représente le concept abstrait d'être acteur et dans le monde, concrètement, ce concept se réalise par l'ensemble de tous les individus du monde qui sont acteurs. Cet ensemble est la dénotation du prédicat. De manière générale, la dénotation d'un prédicat à une place est l'**ensemble de tous les individus** qui le vérifient, c'est-à-dire qui tombent sous le chef du concept représenté par le prédicat.

Il en va de même pour les prédicats qui traduisent des adjectifs qualificatifs, comme **gentil**, dont la dénotation est l'ensemble de tous les individus gentils, ainsi que des prédicats qui traduisent des verbes intransitifs, comme **dormir**, qui dénote l'ensemble de tous les individus qui sont en train de dormir dans le monde.

Faisons ici deux remarques importantes. D'abord parler d'ensembles tels que l'ensemble de *tous* les acteurs peut paraître contre-intuitif et peu naturel, car ces ensembles sont immenses et personne ne peut prétendre sérieusement connaître complètement l'ensemble de tous les acteurs du monde. C'est vrai, mais en fait cela ne pose aucun problème pour la théorie. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin, mais disons pour l'instant que savoir que la dénotation du prédicat **acteur** est l'ensemble de tous les acteurs ce n'est pas la même chose que savoir exhaustivement et précisément qui sont les individus qui appartiennent à cette dénotation. Dans la théorie sémantique, ce qui va compter c'est ce premier savoir, bien plus que le second.

Ensuite, les dénotations présentées ici sous forme d'ensembles sont celles de prédicats qui traduisent des termes *singuliers* du français : *acteur*, *gentil*, *dort*, et non pas *acteurs*, *gentils*, *dorment*. On pourrait penser que lorsque l'on dit quelque chose comme « *Joey est acteur* » ou simplement « *cet acteur* », il n'est question que d'un seul individu et pas d'un ensemble d'acteurs. Mais dans ces expressions, le caractère singulier de la dénotation n'est pas porté par le prédicat lui-même, mais d'une certaine manière, il est imposé par un autre élément de la phrase, comme la structure syntaxique ou un déterminant[31]. En soi et pris isolément, un prédicat comme **acteur** n'a aucune raison de distinguer un acteur parmi d'autres, puisqu'il ne fait que présenter le concept ou la propriété d'être acteur.

On peut se convaincre de cela en s'interrogeant sur la dénotation d'une formule, car nous avons à présent en main ce qu'il nous faut pour effectuer le calcul de la valeur de vérité d'une formule simple comme (20), qui traduit la phrase « Joey est acteur ».

(20) $\mathbf{acteur(j)}$

[31]Pour le moment, nous laissons de côté l'analyse sémantique des pluriels ; cela sera abordé plus précisément dans le chapitre 9.

j dénote un individu (celui qui s'appelle Joey dans le cas de figure que nous examinons ici) et **acteur** dénote un ensemble d'individus (les acteurs). Maintenant dans quels cas (20) est-elle vraie ? Simplement si l'individu dénoté par **j** appartient à l'ensemble dénoté par **acteur**. Et cela n'est rien d'autre que la condition de vérité de (20). La « rencontre » dénotationnelle du prédicat et de son argument, qui donne la dénotation de la formule, se fait par la relation d'appartenance (le $\in$ de la théorie des ensembles) entre un objet et un ensemble d'objets.

La dénotation d'un prédicat binaire, comme **aimer** ou **frère-de**, est un peu plus complexe, mais poursuit le même genre de formalisation. Un tel prédicat exprime une relation qui se joue entre deux individus ; sa dénotation ne peut donc pas être directement un ensemble d'individus où chacun vérifie un concept indépendemment de ses « compagnons d'ensemble ». Il faut pouvoir rendre compte du fait que, par exemple, Ross peut être le frère de Monica mais pas de Chandler, et aussi que Monica n'est pas le frère de Ross.

Par conséquent, la dénotation d'un prédicat binaire est un ensemble dans lequel des individus sont explicitement mis en relation avec d'autres. Un moyen technique d'indiquer une mise en relation est d'utiliser des listes ou ce qu'on appelle des ***n*-uplets** ; un n-uplet est une liste qui contient exactement n objets. Un n-uplet ou une liste est une manière de représenter mathématiquement une collection d'objets, mais c'est très différent d'un ensemble, car dans un n-uplet les objets qu'il contient sont présentés dans un *ordre* précis et déterminant, alors que la notion d'ordre n'a aucune pertinence à l'intérieur d'un ensemble ; de même un objet donné peut apparaître plusieurs fois dans un n-uplet, c'est-à-dire y occupper plusieurs positions, alors qu'un objet appartient une fois pour toutes à un ensemble.

Pour expliciter une relation binaire, on utilisera des n-uplets à deux éléments, ce qu'on appelle des **couples**[32]. Ainsi la dénotation d'un prédicat binaire est un **ensemble de couples d'individus**, tous les couples tels que leur premier membre vérifie vis-à-vis de leur second membre la relation exprimée par le prédicat. Par exemple, on peut supposer que la dénotation de **frère-de** contiendra, entre autres, le couple composé de Ross et de Monica, mais pas le couple composé de Monica et de Ross (les couples sont ordonnés), qui lui pourra appartenir à la dénotation de **sœur-de**.

Et le calcul de la dénotation d'une formule comme (21) reste fondamentalement le même, sauf qu'on l'applique à des couples et des ensembles de couples.

(21) $\mathbf{frère\text{-}de}(\mathbf{r_2}, \mathbf{m})$

(21) est vraie si le couple constitué de la dénotation de $\mathbf{r_2}$ et de celle de $\mathbf{m}$ appartient à la dénotation de **frère-de**, qui est l'ensemble de tous les couples frère–sœur ou frère-frère du monde. Remarque : si un individu a plusieurs sœurs, mettons

[32] *Couple* ici est un terme technique. Si on veut, c'est la manière normale de prononcer 2-uplet en français. N'y cherchons pas la connotation que l'on retrouve avec des couples mariés ou des couples d'amoureux. Notons en passant qu'en français, un *ensemble* à deux éléments s'appelle une **paire**.

trois, alors il apparaîtra en tête de trois couples différents dans la dénotation de **frère-de**, un couple pour chaque sœur.

On peu maintenant généraliser : la dénotation d'un prédicat à n arguments (avec $n \geq 2$) est un ensemble de n-uplets d'individus. Pour un prédicat ternaire, on parlera d'ensembles de triplets, pour un prédicat quaternaire, d'ensembles de quadruplets, etc.

Nous allons voir maintenant comment représenter précisément (c'est-à-dire formellement) ce système de dénotations au moyen de l'outil mathématique que sont les modèles.

2.3.2 Les modèles

Nous avons vu que la dénotation de la plupart des expressions interprétables n'est pas absolue : elle *dépend* d'un certain nombre de circonstances, de cas de figure, bref de *comment est le monde*. Par exemple, pour que **acteur(j)** soit vraie, il faut que Joey soit effectivement un acteur dans le monde qu'on envisage. C'est peut-être le cas, ça peut ne pas l'être. Les choses sont ce qu'elles sont, mais elles pourraient être autrement ; et de toute façon, personne ne sait tout sur tout.

En fait si la dénotation d'une expression dépend d'un certain état du monde, c'est qu'il ne convient pas de parler de dénotation seule, et dorénavant on prendra soin d'envisager la dénotation d'une expression toujours *relativement* à une certaine configuration du monde.

Nous avons donc besoin de tenir compte de cette « certaine configuration du monde ». Cela veut dire que nous allons devoir nous donner un moyen de *représenter* suffisamment précisément le monde et son « état ». Pour ce faire, l'outil que nous allons utiliser est celui des **modèles**.

Un modèle est une figuration mathématique du monde ; c'est une représentation **ensembliste** et **structurée**. Dans sa version la plus simple, la notion de modèle nous fournit ce que l'on peut vraiment appeler une image du monde, au sens d'un cliché ou d'un instantané. Et pour des raisons avant tout pratiques, les modèles que l'on examinera de près ne constituent que des images *partielles* du monde, comme les photographies qui ne restituent nécessairement que de minuscules portions de la réalité. Mais qu'un modèle décrive fidèlement, scrupuleusement et donc démesurément le monde ou qu'il ne donne qu'une image partielle, les caractéristiques définitoires qui le sous-tendent restent exactement les mêmes. Les modèles partiels, souvent minuscules, que nous verrons en exemples par la suite, je les appellerai des « modèles-jouets » ; un véritable modèle quant à lui est un objet plutôt théorique et est supposé décrire *complètement* le monde.

Qu'est-ce qui fait que le monde, ou *un* monde, est tel qu'il est et pas autrement ? Ce qui le caractérise c'est tout d'abord l'ensemble des choses, c'est-à-dire des individus, qui le peuplent. Un monde dans lequel existe King-Kong est assurément différent du monde dans lequel existent les lecteurs de ces pages. Un modèle indique ce genre d'information en définissant un **domaine** – ce que l'on appelle aussi un **univers**[33]. Le domaine d'un modèle donné est un *ensemble d'individus*, l'ensemble de tous les individus qui appartiennent au monde que décrit ce modèle.

Remarquons qu'une façon de se donner des modèles partiels est de les définir sur de petits domaines, qui ne comportent que très peu d'individus. On dira alors qu'ils ne contiennent que les individus qui nous intéressent dans notre modélisation du monde, que les individus dont on est susceptible de parler dans un contexte de discours particulier.

Voici un exemple de (petit) domaine d'individus – appelons-le $\mathcal{A}$:

(22) $\mathcal{A}$ = {MonicaG ; PhoebeB ; RachelG ; ChandlerB ; JoeyT ; RossG}[34]

Ce que contient l'ensemble $\mathcal{A}$, en tant que domaine, ce sont des individus, et pas des noms. Il se trouve que les individus de cet exemple sont des personnes, mais on aurait pu aussi faire figurer des objets ou des animaux dans $\mathcal{A}$.

Notation 2.4
Pour bien marquer la distinction entre les mots ou noms de la langue et les individus qui appartiennent à la réalité décrite dans un modèle, ces derniers seront représentés à l'aide d'une police de caractères spéciale, en Petites Capitales.

Il faudra donc bien veiller à ne pas confondre le prénom *Joey*, qui appartient à la langue naturelle (le français ou l'anglais), la constante **j** qui appartient au langage objet LO, et l'individu JoeyT qui appartient au modèle. Il serait probablement plus pédagogique de présenter un dessin ou une photo de l'individu au lieu de la séquence JoeyT pour bien montrer qu'il s'agit là d'une portion de réalité. Mais cette stratégie, qui deviendrait vite graphiquement encombrante, ne resterait somme toute qu'un moyen terme tout aussi artificiel. Accommodons-nous plutôt des contraintes matérielles imposées par un ouvrage écrit en faisant usage de la convention de notation typographique 2.4.

Donc un modèle établit une description (éventuellement partielle) du monde en spécifiant un domaine d'individus, la « population » du monde. Un domaine n'est qu'un ensemble, dans lequel les individus nous sont présentés en vrac. Une description du monde ne se ramène pas qu'à cela ; cela se doit d'être plus sophistiqué, plus informatif. C'est pour cela que j'ai dit plus haut qu'un modèle est *structuré*. Les individus du domaine sont organisés d'une certaine manière, et cette « certaine manière » n'est ni plus ni moins qu'un certain état du monde. Le modèle spécifie une telle organisation en indiquant « qui est qui », « qui est quoi » et « qui fait quoi » dans le domaine.

En d'autres termes, un modèle décrit l'état du monde en explicitant le lien entre le domaine et le langage (en l'occurrence LO). Ce lien est en fait la dénotation

[33] Les appellations complètes et plus précise que l'on trouve souvent sont **domaine** ou **univers de quantification**, ou encore **domaine** ou **univers d'interprétation**.

[34] On utilise la notation mathématique habituelle qui représente le contenu d'un ensemble encadré d'accolades { }, ses éléments séparés par des points-virgules.

du vocabulaire. En effet, savoir dans quel état est le monde, ou savoir ce qui se passe dans le monde, cela revient finalement à connaître les dénotations de tous les prédicats du langage, puisque les prédicats servent à donner, dans le langage, des informations sur le monde[35].

Illustrons cela en reprenant « notre histoire » introduite via les exemples (9)–(13). Un modèle qui décrit fidèlement la réalité d'un monde devra par exemple nous dire qui est italien parmi les individus du domaine, autrement dit quel est l'ensemble des italiens,... autrement dit quelle est dénotation du prédicat **italien**. Et de même, il devra nous dire qui est une femme, qui est un homme, qui est acteur, qui fume, qui dort, etc. Mais aussi qui aime qui, qui connaît qui, qui embrasse qui, qui est le frère de qui, etc. Bref, on attend d'un modèle qu'il réponde à ce genre de question pour tout prédicat du langage.

Par exemple, notre modèle en cours pourra nous faire savoir que (23a) est la dénotation de **italien**, (23b) celle de **acteur**, (23c) celle de **femme**, (23d) celle de **homme**, etc. Ces ensembles sont forcément des sous-ensembles de $\mathcal{A}$.

(23)
a. $\{\textsc{JoeyT}\}$
b. $\{\textsc{JoeyT}\}$
c. $\{\textsc{MonicaG}\ ;\ \textsc{PhoebeB}\ ;\ \textsc{RachelG}\}$
d. $\{\textsc{JoeyT}\ ;\ \textsc{ChandlerB}\ ;\ \textsc{RossG}\}$

Dans ce mini-modèle, **italien** et **acteur** ont la même dénotation, mais c'est justement parce que le modèle est très petit. Cela ne tire donc pas vraiment à conséquence.

Pour les prédicats n-aires, nous représenterons les n-uplets en les encadrant de chevrons $\langle\,\rangle$ en séparant leurs membres par des virgules. Par exemple : $\langle \textsc{RossG}, \textsc{RachelG} \rangle$ est un couple d'individus. Le modèle pourra ainsi nous dire que (24a) est la dénotation de **aimer** et (24b) celle de **frère-de**.

(24)
a. $\{\langle \textsc{RachelG}, \textsc{RossG}\rangle\ ;\ \langle \textsc{RossG}, \textsc{RachelG}\rangle\ ;\ \langle \textsc{MonicaG}, \textsc{ChandlerB}\rangle\ ;$
$\langle \textsc{ChandlerB}, \textsc{MonicaG}\rangle\}$
b. $\{\langle \textsc{RossG}, \textsc{MonicaG}\rangle\}$

Ce que nous devons voir pour terminer, c'est comment le modèle nous fournit ces réponses. On utilise à cet effet un outil formel simple : une **fonction** qui à chaque constante non logique de LO associe sa dénotation dans le modèle. Une telle fonction s'appelle une **fonction d'interprétation**, et elle est, au côté du domaine, un élément constitutif du modèle. Notons-la F. Un début de description (possible) du monde apparaîtra alors comme ci-dessous ; de manière générale, on représentera graphiquement une fonction sous forme de « matrice » à deux colonnes, la première correspondant à l'ensemble de départ de la fonction, la seconde à son ensemble

[35]Notez que l'on pourrait connaître certaines informations sur le monde qui soient indicibles ; elles ne correspondraient donc à la dénotation d'aucun prédicat. Cela est tout à fait concevable (encore que les langues naturelles ont un pouvoir expressif immense). Mais comme nous étudions ici la sémantique de la langue, nous ne nous intéresserons qu'aux informations « dicibles ».

d'arrivée et chaque élément de l'ensemble de départ est mis en regard de son image par une flèche ($\mapsto$).

$$F : \left[\begin{array}{lll} \textbf{italien} & \longmapsto & \{\textsc{Joey}\mathrm{T}\} \\ \textbf{acteur} & \longmapsto & \{\textsc{Joey}\mathrm{T}\} \\ \textbf{femme} & \longmapsto & \{\textsc{Monica}\mathrm{G}\ ;\ \textsc{Phoebe}\mathrm{B}\ ;\ \textsc{Rachel}\mathrm{G}\} \\ \textbf{homme} & \longmapsto & \{\textsc{Joey}\mathrm{T}\ ;\ \textsc{Chandler}\mathrm{B}\ ;\ \textsc{Ross}\mathrm{G}\} \\ \textbf{fumer} & \longmapsto & \{\textsc{Chandler}\mathrm{B}\} \\ \textbf{aimer} & \longmapsto & \{\langle \textsc{Rachel}\mathrm{G}, \textsc{Ross}\mathrm{G}\rangle\ ;\ \langle \textsc{Ross}\mathrm{G}, \textsc{Rachel}\mathrm{G}\rangle\ ; \\ & & \langle \textsc{Monica}\mathrm{G}, \textsc{Chandler}\mathrm{B}\rangle\ ; \\ & & \langle \textsc{Chandler}\mathrm{B}, \textsc{Monica}\mathrm{G}\rangle\} \\ \textbf{frère-de} & \longmapsto & \{\langle \textsc{Ross}\mathrm{G}, \textsc{Monica}\mathrm{G}\rangle\} \\ \text{etc.} & & \end{array}\right]$$

On peut également expliciter F avec la notation fonctionnelle habituelle, en écrivant par exemple : $F(\textbf{italien}) = \{\textsc{Joey}\mathrm{T}\}$, $F(\textbf{femme}) = \{\textsc{Monica}\mathrm{G}\ ;\ \textsc{Phoebe}\mathrm{B}\ ;\ \textsc{Rachel}\mathrm{G}\}$, etc.

Le modèle nous dit aussi « qui est qui ». Cela signifie que la fonction d'interprétation indique également à quel individu du domaine correspond chaque constante d'individu du langage. Donc F doit être complétée par les attributions suivantes :

$$\left[\begin{array}{rll} \mathbf{m} & \longmapsto & \textsc{Monica}\mathrm{G} \\ \mathbf{p} & \longmapsto & \textsc{Phoebe}\mathrm{B} \\ \mathbf{r_1} & \longmapsto & \textsc{Rachel}\mathrm{G} \\ \mathbf{c} & \longmapsto & \textsc{Chandler}\mathrm{B} \\ \mathbf{j} & \longmapsto & \textsc{Joey}\mathrm{T} \\ \mathbf{r_2} & \longmapsto & \textsc{Ross}\mathrm{G} \end{array}\right]$$

Résumons par la définition suivante :

Définition 2.10 (Modèle)
Un **modèle** (simple) d'interprétation sémantique d'un langage LO est défini par un couple $\langle \mathcal{A}, F\rangle$ où $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide et F une fonction qui projette les constantes non logiques (ie d'individus et de prédicats) de LO dans $\mathcal{A}$.
Si $\mathcal{M}$ est le nom du modèle, on pose $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F\rangle$ en guise définition.
On dit que $\mathcal{A}$ est le **domaine** de $\mathcal{M}$ et on le tient pour l'ensemble de tous les individus du monde décrit par $\mathcal{M}$.
F s'appelle la **fonction d'interprétation** de LO dans $\mathcal{M}$.

2.3.3 Les règles sémantiques

Nous pouvons maintenant définir la sémantique du langage LO, c'est-à-dire ses règles d'interprétation. Comme nous le savons maintenant, il s'agit de règles de calcul, et plus précisément du calcul de la dénotation de toute expression de LO. Pour exprimer ces calculs, introduisons d'abord un élément de notation.

Notation 2.5 (Valeur sémantique)
Soit α une expression interprétable quelconque (de LO).
$[\![\alpha]\!]$ représente la **valeur sémantique** de l'expression α. On l'appelle également l'**interprétation** de α.

Nous allons nous servir de cette notation pour représenter la dénotation des expressions. La dénotation est, comme il se doit, la valeur sémantique relativisée à un certain modèle.

Notation 2.6 (Dénotation)
Soit α une expression interprétable quelconque (de LO) et $\mathcal{M}$ un modèle.
$[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}$ représente la **dénotation** de α *relativement* au modèle $\mathcal{M}$.

Remarque : $[\![\ ]\!]$ est une notation symbolique, mais elle n'appartient pas au langage LO ; là encore c'est un méta-symbole que les sémanticiens utilisent pour parler de la sémantique d'une expression.

Pour décrire le sens dans LO, nous devons définir la valeur sémantique de *toute* expression interprétable relativement à *tout* modèle possible. Pour ce faire, il suffit d'exprimer les règles de calcul par rapport à un modèle absolument quelconque, c'est-à-dire complètement général ; on est sûr ainsi qu'elles vaudront pour n'importe quel modèle. Comme l'ensemble des expressions de LO est déterminé par les règles de syntaxe, le plus efficace est de reprendre chacune de ces règles et de lui associer une règle d'interprétation sémantique. Ainsi on aura la garantie d'avoir défini une sémantique pour toutes les expressions possibles de LO.

Commençons d'abord par définir l'interprétation du « lexique » de base de LO, c'est-à-dire les constantes d'individus et de prédicats. Nous l'avons vu, la valeur sémantique de ces constantes nous est directement donnée par la fonction d'interprétation F du modèle par rapport auquel on a choisi d'effectuer le calcul.

Définition 2.11 (Interprétation des constantes non logiques)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

1. Si α est une constante d'individu, alors $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}} = F(\alpha)$; ie l'individu de $\mathcal{A}$ assigné à a par F.
2. Si P est une constante de prédicat, alors $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} = F(P)$; ie un ensemble d'individus de $\mathcal{A}$ si P est unaire, un ensemble de couples d'individus de $\mathcal{A}$ si P est binaire, etc.

Ensuite nous devons spécifier comment obtenir la dénotation de n'importe quelle formule construite par la syntaxe. Les règles d'interprétation sont récursives (comme celles de la syntaxe) et compositionnelles car l'interprétation de toute formule est définie via l'interprétation de ses constituants. Comme la dénotation d'une formule est une valeur de vérité, nous allons devoir manipuler le vrai et le faux, et nous le ferons au moyen des symboles suivants :

Notation 2.7 (Valeurs de vérité)
On note $\{0\ ;\ 1\}$ l'ensemble des valeurs de vérité. 1 représente « vrai » et 0 représente « faux »[36].
Ainsi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ signifie que φ est vraie par rapport au (ou dans le) modèle $\mathcal{M}$, et $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ que φ est fausse par rapport à $\mathcal{M}$.

Définition 2.12 (Interprétation des formules)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

(Sem.1)
a. Si P est un prédicat à une place et si α est une constante, alors $[\![P(\alpha)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
b. Si P est un prédicat à deux places et si α et β sont des constantes, alors $[\![P(\alpha, \beta)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\beta]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
c. Si P est un prédicat à trois places et si α, β et γ sont des constantes, alors $[\![P(\alpha, \beta, \gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\beta]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\gamma]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
d. etc.

(Sem.2) Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![t_1]\!]^{\mathcal{M}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{M}}$.

(Sem.3) Si φ est une formule, alors $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(Sem.4) Si φ et ψ sont des formules, alors
a. $[\![[\varphi \wedge \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *et* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
b. $[\![[\varphi \vee \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
c. $[\![[\varphi \rightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
d. $[\![[\varphi \leftrightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.

Arrêtons-nous là pour le moment et laissons de côté provisoirement l'interprétation des formules quantifiées, nous y reviendrons en temps voulu.

Ces règles nous disent dans quels cas (et seulement quels cas) une formule de telle ou telle structure est vraie. Il s'agit bien de *conditions de vérité*. Et ces règles d'interprétation définissent donc bien le *sens* des formules.

Les règles (Sem.1) ne font que reformuler précisément ce que nous avons vu en § 2.3.1 : la dénotation d'une formule atomique s'obtient en vérifiant l'appartenance ensembliste ($\in$) de la dénotation des arguments (seuls ou en n-uplets) à la dénotation des prédicats. La règle (Sem.2) est assez simple : elle dit que $t_1 = t_2$ est vrai dans $\mathcal{M}$ si et seulement si les dénotations de t_1 et de t_2 sont identiques.

Ce qui est un peu plus nouveau, ce sont les règles (Sem.3) et (Sem.4) qui interprètent le rôle des connecteurs logiques. Mais d'après ce qu'on a vu en § 2.2.1.3, elle sont assez simples à comprendre, sauf peut-être (Sem.4c) que nous commenterons un peu plus en § 2.4.1.

Pour illustrer le fonctionnement de ces règles, regardons un exemple d'application. Une façon de mettre en œuvre les calculs sémantiques consiste à se donner un

[36] 0 et 1 sont eux aussi des méta-symboles. On pourrait à la place utiliser F et V, mais par expérience je trouve que 0 et 1 permettent une lecture plus fluide, ils se distinguent mieux graphiquement (surtout dans les tables de vérité, cf. § 2.4.1). Et puis on a déjà F pour la fonction d'interprétation, évitons autant que possible les homographies.

modèle petit mais détaillé et d'évaluer des formules par rapport à ce modèle. Soit donc le modèle-jouet $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{A}_1, F_1 \rangle$, défini comme suit (on lui met l'indice $_1$ pour montrer que c'est un modèle bien particulier).

$\mathcal{A}_1 = \{$Thésée ; Hippolyta ; Hermia ; Héléna ; Lysandre ; Démétrius ; Egée ; Puck ; Obéron ; Titania ; Bottom$\}$

$F_1(\mathbf{t_1}) =$ Thésée,
$F_1(\mathbf{h_1}) =$ Hippolyta,
$F_1(\mathbf{h_2}) =$ Hermia,
$F_1(\mathbf{h_3}) =$ Héléna,
$F_1(\mathbf{l}) =$ Lysandre,
$F_1(\mathbf{d}) =$ Démétrius,
$F_1(\mathbf{e}) =$ Egée,
$F_1(\mathbf{p}) =$ Puck,
$F_1(\mathbf{o}) =$ Obéron,
$F_1(\mathbf{t_2}) =$ Titania,
$F_1(\mathbf{b}) =$ Bottom

$F_1(\textbf{elfe}) = \{$Obéron ; Titania ; Puck$\}$

$F_1(\textbf{âne}) = \{$Bottom$\}$

$F_1(\textbf{farceur}) = \{$Thésée ; Obéron ; Titania ; Puck$\}$

$F_1(\textbf{triste}) = \{$Héléna$\}$

$$F_1(\textbf{mari-de}) = \left\{ \begin{matrix} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta} \rangle \text{ ;} \\ \langle \text{Obéron}, \text{Titania} \rangle \end{matrix} \right\}$$

$$F_1(\textbf{père-de}) = \left\{ \langle \text{Egée}, \text{Hermia} \rangle \right\}$$

$$F_1(\textbf{aimer}) = \left\{ \begin{matrix} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta} \rangle \text{ ;} \\ \langle \text{Hippolyta}, \text{Thésée} \rangle \text{ ;} \\ \langle \text{Lysandre}, \text{Hermia} \rangle \text{ ;} \\ \langle \text{Hermia}, \text{Lysandre} \rangle \text{ ;} \\ \langle \text{Démétrius}, \text{Hermia} \rangle \text{ ;} \\ \langle \text{Héléna}, \text{Démétrius} \rangle \text{ ;} \\ \langle \text{Titania}, \text{Bottom} \rangle \end{matrix} \right\}$$

Cette présentation de $\mathcal{M}_1$ implique que nous travaillons présentement sur une petite portion d'un langage de type LO qui ne comprend que les constantes d'individu $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{o}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{b}$, et les prédicats **elfe**, **âne**, **farceur**, **triste**, **mari-de**, **père-de** et **aimer**. Ce petit fragment est loin de nous permettre de rédiger en LO un résumé d'une pièce de Shakespeare, mais il nous suffira pour évaluer la vérité d'une bonne variété de formules. Notons aussi que $\mathcal{M}_1$ sous-entend aussi (mais sans équivoque possible) que tous les prédicats sont à un argument sauf **mari-de**, **père-de** et **aimer** qui sont binaires.

Commençons avec une formule très simple ; on peut se demander quelle est la dénotation (25) relativement à $\mathcal{M}_1$:

(25) $\textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})$

c'est-à-dire, que vaut $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}_1}$? La règle (Sem.1b) nous dit que $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi $\langle [\![\mathbf{d}]\!]^{\mathcal{M}_1}, [\![\mathbf{h_2}]\!]^{\mathcal{M}_1} \rangle \in [\![\textbf{aimer}]\!]^{\mathcal{M}_1}$. Or, d'après la règle 1 de l'interprétation des constantes non logiques, $[\![\mathbf{d}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{d})$ c'est-à-dire Démétrius d'après la donnée de $\mathcal{M}_1$, et $[\![\mathbf{h_2}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{h_2}) =$ Hermia. Donc

$\langle [\![\mathbf{d}]\!]^{\mathcal{M}_1}, [\![\mathbf{h_2}]\!]^{\mathcal{M}_1} \rangle = \langle \text{DÉMÉTRIUS}, \text{HERMIA} \rangle$. Quant à $[\![\textbf{aimer}]\!]^{\mathcal{M}_1}$ c'est égal à $F_1(\textbf{aimer})$, qui vaut l'ensemble de couples donnée plus haut. Et on constate que $\langle \text{DÉMÉTRIUS}, \text{HERMIA} \rangle$ fait bien partie de cet ensemble. On donc bien montré que $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, (25) est vraie dans $\mathcal{M}_1$.

Essayons avec (26) :

(26) $[\textbf{triste}(\mathbf{b}) \wedge \textbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]$

La règle (Sem.4a) nous dit que $[\![[\textbf{triste}(\mathbf{b}) \wedge \textbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi $[\![\textbf{triste}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Regardons d'abord $[\![\textbf{triste}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1}$. $[\![\mathbf{b}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{b}) = \text{BOTTOM}$ et $[\![\textbf{triste}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\textbf{triste}) = \{\text{HÉLÉNA}\}$. Donc évidemment $[\![\mathbf{b}]\!]^{\mathcal{M}_1} \notin [\![\textbf{triste}]\!]^{\mathcal{M}_1}$ et donc, en vertu de (Sem.1a), on en conclut que $[\![\textbf{triste}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. On peut s'arrêter là, car la condition demandée par (Sem.4a) n'est pas remplie : il faut que les *deux* sous-formules soient vraies pour que (26) le soit ; si la première est fausse, il est inutile d'évaluer la seconde, on sait que $[\![[\textbf{triste}(\mathbf{b}) \wedge \textbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$.

Remarquons en passant que ce qui est faux par rapport à $\mathcal{M}_1$, comme **triste**(**b**), c'est ce qui n'est pas donné comme information par $\mathcal{M}_1$.

Regardons une formule négative, (27) :

(27) $\neg[\textbf{âne}(\mathbf{p}) \vee \textbf{farceur}(\mathbf{p})]$

(Sem.3) dit que $[\![\neg[\textbf{âne}(\mathbf{p}) \vee \textbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ si et seulement si $[\![[\textbf{âne}(\mathbf{p}) \vee \textbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. Calculons donc $[\![[\textbf{âne}(\mathbf{p}) \vee \textbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1}$. (Sem.4b) dit que cette sous-formule est vraie si $[\![\textbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ou si $[\![\textbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Là on peut gagner du temps en observant $\mathcal{M}_1$ qui nous conseille de regarder d'abord la valeur de **farceur**(**p**). $[\![\mathbf{p}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{p}) = \text{PUCK}$ et $[\![\textbf{farceur}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\textbf{farceur}) = \{\text{THÉSÉE} ; \text{OBÉRON} ; \text{TITANIA} ; \text{PUCK}\}$, donc $[\![\mathbf{p}]\!]^{\mathcal{M}_1} \in [\![\textbf{farceur}]\!]^{\mathcal{M}_1}$, et donc $[\![\textbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Et cela suffit à montrer que $[\![[\textbf{âne}(\mathbf{p}) \vee \textbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, puisque selon (Sem.4b) il suffit que l'un des deux membres d'une disjonction soit vrai pour que l'ensemble soit vrai. Maintenant la règle (Sem.3) – comme toutes les règles d'interprétation – est en « si et seulement si » ; cela veut dire que $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ *et* $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Par conséquent, $[\![\neg[\textbf{âne}(\mathbf{p}) \vee \textbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$.

Exercice 2.4
Calculer la dénotation relativement à $\mathcal{M}_1$ des formules suivantes :

1. $[\textbf{père-de}(\mathbf{o}, \mathbf{p}) \leftrightarrow \textbf{elfe}(\mathbf{b})]$
2. $[\neg\, \textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_3}) \rightarrow \textbf{triste}(\mathbf{h_3})]$
3. $\neg[\textbf{elfe}(\mathbf{p}) \wedge \textbf{farceur}(\mathbf{p})]$
4. ***
5. ***