Interprétation dans un modèle

Sémantique formelle, L. Roussarie

2014

Soit le modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$, défini comme suit.

$\mathcal{A}$ = {Thésée ; Hippolyta ; Hermia ; Héléna ; Lysandre ; Démétrius ; Egée ; Puck ; Obéron ; Titania ; Bottom}

$F(\mathbf{t}_1)$ = Thésée, $F(\mathbf{h}_1)$ = Hippolyta, $F(\mathbf{h}_2)$ = Hermia, $F(\mathbf{h}_3)$ = Héléna, $F(\mathbf{l})$ = Lysandre, $F(\mathbf{d})$ = Démétrius, $F(\mathbf{e})$ = Egée, $F(\mathbf{p})$ = Puck, $F(\mathbf{o})$ = Obéron, $F(\mathbf{t}_2)$ = Titania, $F(\mathbf{b})$ = Bottom

$$F(\textbf{aimer}) = \left\{\begin{array}{l} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta} \rangle \ ; \\ \langle \text{Hippolyta}, \text{Thésée} \rangle \ ; \\ \langle \text{Lysandre}, \text{Hermia} \rangle \ ; \\ \langle \text{Hermia}, \text{Lysandre} \rangle \ ; \\ \langle \text{Démétrius}, \text{Hermia} \rangle \ ; \\ \langle \text{Héléna}, \text{Démétrius} \rangle \ ; \\ \langle \text{Titania}, \text{Bottom} \rangle \end{array}\right\}$$

$F(\textbf{elfe})$ = {Obéron ; Titania ; Puck}
$F(\textbf{âne})$ = {Bottom}
$F(\textbf{farceur})$ = {Thésée ; Obéron ; Titania ; Puck}
$F(\textbf{triste})$ = {Héléna}

$$F(\textbf{mari-de}) = \left\{\begin{array}{l} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta} \rangle \ ; \\ \langle \text{Obéron}, \text{Titania} \rangle \end{array}\right\}$$

$$F(\textbf{père-de}) = \left\{ \langle \text{Egée}, \text{Hermia} \rangle \right\}$$

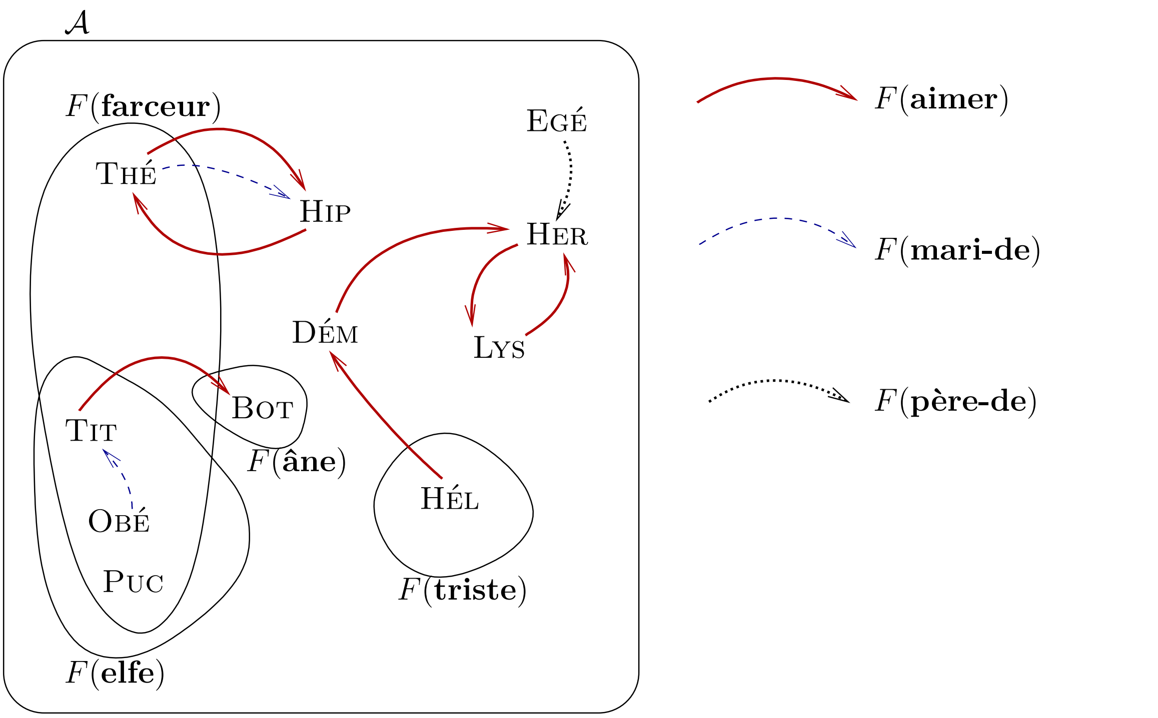

Figure 1 – Représentation graphique de $\mathcal{M}$

Exemples de calcul de dénotation

Il s'agit donc d'appliquer les règles d'interprétation (Def.9, (Sem.1–Sem.5)).

(1) $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\mathbf{p}]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![\mathbf{âne}]\!]^{\mathcal{M}}$ (Sem.1a)
b. $[\![\mathbf{p}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\mathbf{p})$ (Def.8)
c. $=$ Puck $(\mathcal{M})$
d. $[\![\mathbf{âne}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\mathbf{âne})$ (Def.8)
e. $= \{$Bottom$\}$ $(\mathcal{M})$
f. Est-ce que Puck $\in \{$Bottom$\}$? Non.
g. Donc $[\![\mathbf{p}]\!]^{\mathcal{M}} \notin [\![\mathbf{âne}]\!]^{\mathcal{M}}$
h. Et donc $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(2) $[\![\neg\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\neg\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ car $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ (Sem.3)

(3) $[\![\mathbf{mari\text{-}de}(\mathbf{o}, \mathbf{t_2})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{mari\text{-}de}(\mathbf{o}, \mathbf{t_2})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![\mathbf{o}]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\mathbf{t_2}]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![\mathbf{mari\text{-}de}]\!]^{\mathcal{M}}$ (Sem.1.b)
b. $[\![\mathbf{o}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\mathbf{o}) =$ Obéron
c. $[\![\mathbf{t_2}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\mathbf{t_2}) =$ Titania
d. $[\![\mathbf{mari\text{-}de}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\mathbf{mari\text{-}de}) = \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$
e. Est-ce que $\langle$Obéron, Titania$\rangle \in \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$? Oui.
f. Donc $\langle [\![\mathbf{o}]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\mathbf{t_2}]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![\mathbf{mari\text{-}de}]\!]^{\mathcal{M}}$
g. Donc $[\![\mathbf{mari\text{-}de}(\mathbf{o}, \mathbf{t_2})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

(4) $[\![\mathbf{mari\text{-}de}(\mathbf{t_2}, \mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{mari\text{-}de}(\mathbf{t_2}, \mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$
car $\langle$Titania, Obéron$\rangle \notin \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$

(5) $[\![\mathbf{mari\text{-}de}(\mathbf{t_1}, \mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{mari\text{-}de}(\mathbf{t_1}, \mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
car $\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle \in \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$

(6) $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \vee \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \vee \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ou $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.b)
b. Or $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, car Bottom $\in F(\mathbf{âne})$.
c. Donc $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \vee \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

(7) $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ et $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.a)
b. Or $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.
c. Donc $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(8) $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.c)
b. Or $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, donc il faudrait que $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ aussi pour que toute la formule soit vraie,
c. Mais $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.
d. Donc $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(9) $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.c)
b. Or $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$,
c. Donc la suite n'a pas d'importance, et $[\![\mathbf{âne}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{âne}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

Sur les formules quantifiées

Intuitivement : $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi il existe au moins <u>une valeur</u> de x tq $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

et $[\![\forall x \varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour <u>toute valeur</u> de x, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
Problème : qu'est-ce qu'une valeur de x ? On n'a pas de règle pour $[\![x]\!]^{\mathcal{M}}$.
Solution (trop) simple : les constantes vont jouer le rôle des valeurs pour les variables.

(10) $[\![\exists x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. On va calculer :
   (i) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_1}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (ii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_1}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_2}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iv) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_3}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{h_3})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (v) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{l}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{l})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vi) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{d}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vii) etc.
   jusqu'à ce que l'on trouve le résultat 1.
b. Evidemment on a intérêt à commencer par une constante qui marche (quand elle existe), par exemple **o**,
c. dans ce cas (ie si la formule est vraie) on a **un seul** calcul à faire.
d. Mais pour montrer qu'une telle formule est fausse, il faut faire *tous* les calculs et trouver 0 à chaque fois.

(11) $[\![\forall x[\mathbf{elfe}(x) \rightarrow \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. Il faut calculer :
   (i) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_1}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (ii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_1}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_2}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iv) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_3}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{h_3})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (v) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{l}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{l})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vi) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vii) etc.
   et trouver le résultat 1 **à chaque fois**.
b. Donc ici on doit **répéter** le calcul (autant de fois qu'il y a de constantes dans LO/d'individus dans $\mathcal{A}$) pour montrer que la formule est vraie.
c. Evidemment dès qu'on trouve 0, on s'arrête : ça prouve que la formule entière est fausse.

Méthode rapide pour les cas simples

Pour une formule de la forme $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$:

(12) $[\![\exists x[P(x) \wedge Q(x)]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
ssi $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} \cap [\![Q]\!]^{\mathcal{M}} \neq \varnothing$

Pour une formule de la forme $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$:

(13) $[\![\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
ssi $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} \subset [\![Q]\!]^{\mathcal{M}}$

Plusieurs quantificateurs

(14) $[\![\forall x \exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. Instructions pour montrer que c'est vrai dans $\mathcal{M}$ (= conditions de vérité) :
   (i) **Répéter** le calcul de $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}}$ pour toutes les valeurs de x
   (ii) A chaque fois, **trouver une valeur** de y pour que $[\![\mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

On doit donc répéter la recherche de valeur pour y (ii) autant fois qu'il y a de valeur pour x.

(15) $[\![\exists y \forall x\, \textbf{aimer}(x,y)]\!]^{\mathcal{M}} = ?$

a. Instructions pour montrer que c'est vrai dans $\mathcal{M}$:
   (i) **Trouver une valeur** de y pour que $[\![\forall x\, \textbf{aimer}(x,y)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
   (ii) Avec cette valeur, **répéter** le calcul de $[\![\textbf{aimer}(x,y)]\!]^{\mathcal{M}}$ pour toutes les valeurs de x (et obtenir 1 à chaque fois).

   Donc ici, une seule valeur de y à trouver.

Version plus rigoureuse

Il faut pouvoir définir $[\![x]\!]$ et pouvoir calculer $[\![\textbf{aimer}(x,y)]\!]$ en soi.
Utilisation de *fonctions d'assignation.* Voir autre poly.