Interprétation dans un modèle

Sémantique formelle, L. Roussarie

2010

Soit le modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$, défini comme suit.

$\mathcal{A} = \{\textsc{Thésée} ; \textsc{Hippolyta} ; \textsc{Hermia} ; \textsc{Héléna} ; \textsc{Lysandre} ; \textsc{Démétrius} ; \textsc{Egée} ; \textsc{Puck} ; \textsc{Obéron} ; \textsc{Titania} ; \textsc{Bottom}\}$

$F(\mathbf{t}_1) = \textsc{Thésée}$, $F(\mathbf{h}_1) = \textsc{Hippolyta}$, $F(\mathbf{h}_2) = \textsc{Hermia}$, $F(\mathbf{h}_3) = \textsc{Héléna}$, $F(\mathbf{l}) = \textsc{Lysandre}$, $F(\mathbf{d}) = \textsc{Démétrius}$, $F(\mathbf{e}) = \textsc{Egée}$, $F(\mathbf{p}) = \textsc{Puck}$, $F(\mathbf{o}) = \textsc{Obéron}$, $F(\mathbf{t}_2) = \textsc{Titania}$, $F(\mathbf{b}) = \textsc{Bottom}$

$$F(\textbf{aimer}) = \left\{\begin{array}{l} \langle \textsc{Thésée}, \textsc{Hippolyta} \rangle ; \\ \langle \textsc{Hippolyta}, \textsc{Thésée} \rangle ; \\ \langle \textsc{Lysandre}, \textsc{Hermia} \rangle ; \\ \langle \textsc{Hermia}, \textsc{Lysandre} \rangle ; \\ \langle \textsc{Démétrius}, \textsc{Hermia} \rangle ; \\ \langle \textsc{Héléna}, \textsc{Démétrius} \rangle ; \\ \langle \textsc{Titania}, \textsc{Bottom} \rangle \end{array}\right\}$$

$$F(\textbf{elfe}) = \{\textsc{Obéron} ; \textsc{Titania} ; \textsc{Puck}\}$$
$$F(\textbf{âne}) = \{\textsc{Bottom}\}$$
$$F(\textbf{farceur}) = \{\textsc{Thésée} ; \textsc{Obéron} ; \textsc{Titania} ; \textsc{Puck}\}$$
$$F(\textbf{triste}) = \{\textsc{Héléna}\}$$
$$F(\textbf{mari-de}) = \left\{\begin{array}{l} \langle \textsc{Thésée}, \textsc{Hippolyta} \rangle ; \\ \langle \textsc{Obéron}, \textsc{Titania} \rangle \end{array}\right\}$$
$$F(\textbf{père-de}) = \{\langle \textsc{Egée}, \textsc{Hermia} \rangle\}$$

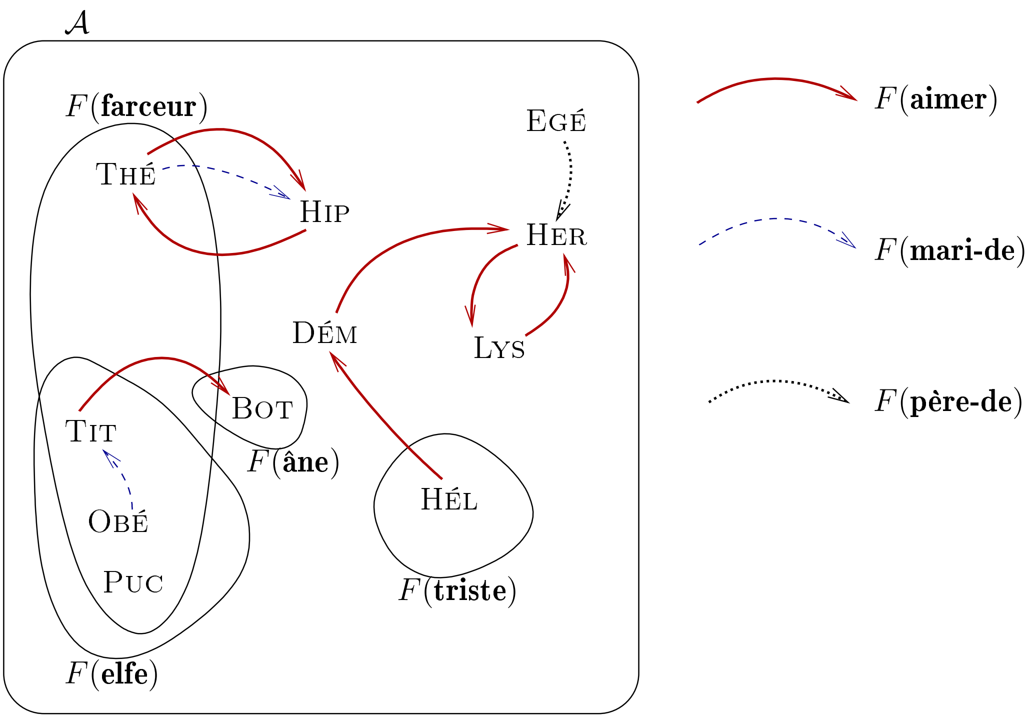

Fig. 1 – Représentation graphique de $\mathcal{M}$

Exemples de calcul de dénotation

Il s'agit donc d'appliquer les règles d'interprétation (Def.9, (Sem.1–Sem.5)).

(1) $[\![\textbf{âne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = ?$

a. $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\textbf{p}]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![\textbf{âne}]\!]^{\mathcal{M}}$ (Sem.1a)
b. $[\![\textbf{p}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\textbf{p})$ (Def.8)
c. $=$ Puck ($\mathcal{M}$)
d. $[\![\textbf{âne}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\textbf{âne})$ (Def.8)
e. $= \{$Bottom$\}$ ($\mathcal{M}$)
f. Est-ce que Puck $\in \{$Bottom$\}$? Non.
g. Donc $[\![\textbf{p}]\!]^{\mathcal{M}} \notin [\![\textbf{âne}]\!]^{\mathcal{M}}$
h. Et donc $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(2) $[\![\neg\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\neg\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ car $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ (Sem.3)

(3) $[\![\textbf{mari-de}(\textbf{o}, \textbf{t}_2)]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\textbf{mari-de}(\textbf{o}, \textbf{t}_2)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![\textbf{o}]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\textbf{t}_2]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![\textbf{mari-de}]\!]^{\mathcal{M}}$ (Sem.1.b)
b. $[\![\textbf{o}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\textbf{o}) =$ Obéron
c. $[\![\textbf{t}_2]\!]^{\mathcal{M}} = F(\textbf{t}_2) =$ Titania
d. $[\![\textbf{mari-de}]\!]^{\mathcal{M}} = F(\textbf{mari-de}) = \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$
e. Est-ce que $\langle$Obéron, Titania$\rangle \in \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$? Oui.
f. Donc $\langle [\![\textbf{o}]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\textbf{t}_2]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![\textbf{mari-de}]\!]^{\mathcal{M}}$
g. Donc $[\![\textbf{mari-de}(\textbf{o}, \textbf{t}_2)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

(4) $[\![\textbf{mari-de}(\textbf{t}_2, \textbf{o})]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\textbf{mari-de}(\textbf{t}_2, \textbf{o})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$
car $\langle$Titania, Obéron$\rangle \notin \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$

(5) $[\![\textbf{mari-de}(\textbf{t}_1, \textbf{h}_1)]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\textbf{mari-de}(\textbf{t}_1, \textbf{h}_1)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
car $\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle \in \{\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle$; $\langle$Obéron, Titania$\rangle\}$

(6) $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \vee \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \vee \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ou $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.b)
b. Or $[\![\textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, car Bottom $\in F(\textbf{âne})$.
c. Donc $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \vee \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

(7) $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \wedge \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \wedge \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ et $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.a)
b. Or Or $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.
c. Donc $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \wedge \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(8) $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \rightarrow \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \rightarrow \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.c)
b. Or $[\![\textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, donc il faudrait que $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ aussi pour que toute la formule soit vraie,
c. Mais $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.
d. Donc $[\![\textbf{âne}(\textbf{b}) \rightarrow \textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(9) $[\![\textbf{âne}(\textbf{p}) \rightarrow \textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} =?$
a. $[\![\textbf{âne}(\textbf{p}) \rightarrow \textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ ou $[\![\textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ (Sem.4.c)
b. Or $[\![\textbf{âne}(\textbf{p})]\!]^{\mathcal{M}} = 0$,
c. Donc la suite n'a pas d'importance, et $[\![\textbf{âne}(\textbf{p}) \rightarrow \textbf{âne}(\textbf{b})]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.

Sur les formules quantifiées

Intuitivement : $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi il existe au moins <u>une valeur</u> de x tq $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ et $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour <u>toute valeur</u> de x, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

Problème : qu'est-ce qu'une valeur de x ? On n'a pas de règle pour $[\![x]\!]^{\mathcal{M}}$.
Solution (trop) simple : les constantes vont jouer le rôle des valeurs pour les variables.

(10) $[\![\exists x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. On va calculer :
   (i) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_1}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (ii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_1}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_2}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iv) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_3}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{h_3})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (v) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{l}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{l})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vi) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{d}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vii) etc.

   jusqu'à ce que l'on trouve le résultat 1.

b. Evidemment on a intérêt à commencer par une constante qui marche (quand elle existe), par exemple **o**,

c. dans ce cas (ie si la formule est vraie) on a **un seul** calcul à faire.

d. Mais pour montrer qu'une telle formule est fausse, il faut faire *tous* les calculs et trouver 0 à chaque fois.

(11) $[\![\forall x[\mathbf{elfe}(x) \rightarrow \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. Il faut calculer :
   (i) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_1}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (ii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_1}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iii) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_2}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (iv) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{h_3}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{h_3})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (v) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{l}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{l})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vi) $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{d}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{d})]\!]^{\mathcal{M}}$
   (vii) etc.

   et trouver le résultat 1 **à chaque fois**.

b. Donc ici on doit **répéter** le calcul (autant de fois qu'il y a de constantes dans LO/d'individus dans $\mathcal{A}$) pour montrer que la formule est vraie.

c. Evidemment dès qu'on trouve 0, on s'arrête : ça prouve que la formule entière est fausse.

Méthode rapide pour les cas simples

Pour une formule de la forme $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$:

(12) $[\![\exists x[P(x) \wedge Q(x)]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
ssi $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} \cap [\![Q]\!]^{\mathcal{M}} \neq \varnothing$

Pour une formule de la forme $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$:

(13) $[\![\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
ssi $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} \subset [\![Q]\!]^{\mathcal{M}}$

Plusieurs quantificateurs

(14) $[\![\forall x \exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. Instructions pour montrer que c'est vrai dans $\mathcal{M}$ (= conditions de vérité) :
   (i) **Répéter** le calcul de $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}}$ pour toutes les valeurs de x
   (ii) A chaque fois, **trouver une valeur** de y pour que $[\![\mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

   On doit donc répéter la recherche de valeur pour y (ii) autant fois qu'il y a de valeur pour x.

(15) $[\![\exists y \forall x\, \textbf{aimer}(x,y)]\!]^{\mathcal{M}} =?$

a. Instructions pour montrer que c'est vrai dans $\mathcal{M}$:

(i) **Trouver une valeur** de y pour que $[\![\forall x\, \textbf{aimer}(x,y)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

(ii) Avec cette valeur, **répéter** le calcul de $[\![\textbf{aimer}(x,y)]\!]^{\mathcal{M}}$ pour toutes les valeurs de x (et obtenir 1 à chaque fois).

Donc ici, une seule valeur de y à trouver.

Version plus rigoureuse

Il faut pouvoir définir $[\![x]\!]$ et pouvoir calculer $[\![\textbf{aimer}(x,y)]\!]$ en soi.
Utilisation de *fonctions d'assignation*. Voir autre poly.