2.4 Un peu de logique

Afin de bien maîtriser la sémantique de LO, il est temps de faire un petit détour vers la logique, car en se fondant sur le calcul des prédicats, LO met surtout en avant les propriétés logiques de la structure sémantique des phrases. Nous allons donc examiner de plus près les connecteurs logiques, ainsi que des notions formelles attachées aux formules de LO, ce qui nous permettra de nous donner des règles d'interprétation assez simples pour les formules quantifiées. Cette section permettra par ailleurs de s'entraîner un peu à l'analyse par conditions de vérité.

2.4.1 Tables de vérité

Les connecteurs logiques ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) de LO sont également appelés des **connecteurs vérifonctionnels**. Cela veut dire que leur dénotation peut être considérée comme une *fonction* à un (pour $\neg$) ou deux (pour les autres) argument(s) pris dans $\{0\ ;\ 1\}$ et qui retourne une valeur de $\{0\ ;\ 1\}$. C'est ce qu'on appelle une **fonction de vérité**. C'est juste une façon mathématique de dire que la valeur de vérité d'une formule construite avec un connecteur dépend simplement de la valeur de vérité de ses sous-formules connectées. Et la définition de ces fonctions nous est donnée dans les règles (Sem.3) et (Sem.4).

On peut expliciter ces règles de manière systématique à l'aide de ce qu'on appelle des **tables de vérité**. Une table de vérité est un tableau qui permet de visualiser très facilement toutes les dénotations que peuvent prendre une formule (ou un schéma de formules) construite avec un connecteur. Le principe est le suivant : les premières colonnes d'une table vont correspondre aux sous-formules connectées ; on y fait figurer toutes les combinaisons de valeurs de vérité qu'elles peuvent prendre (lorsqu'on examine un connecteur binaire, il y a quatre combinaisons possibles) ; et dans la colonne suivante, en face de chaque combinaison de valeurs, on pose la valeur de vérité résultante pour la formule complexe. Les tables de vérité sont aux connecteurs logiques ce que nos vieilles tables de multiplication sont à la multiplication. Le Tableau 2.1 regroupe les tables de vérité des quatre connecteurs logiques de LO.

φ	ψ	$[\varphi \wedge \psi]$	$[\varphi \vee \psi]$	$[\varphi \rightarrow \psi]$	$[\varphi \leftrightarrow \psi]$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

TAB. 2.1 – Tables de vérité des connecteurs logiques de LO

Chaque ligne d'une table est donc une combinaison possible des valeurs de φ et ψ. Par rapport à notre formalisation sémantique, cela veut dire que chaque ligne résume une certaine *catégorie* de modèles : la première ligne représente tous les modèles par rapport auxquels φ et ψ sont toutes deux vraies, la deuxième – tous les modèles par rapport auxquels φ est vraie et ψ est fausse, etc. Quand on regarde la dénotation d'une formule construite avec un connecteur binaire, on ne s'intéresse qu'à quatre grandes catégories de modèles. On peut aussi dresser la table de vérité de la négation, et là on n'a à regarder que deux catégories de modèles : ceux où la formule de départ est vraie et ceux où elle est fausse ; cf. Tableau 2.2.

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

TAB. 2.2 – Table de vérité de la négation

Le principe des tables de vérité permet également de calculer toutes les dénotations possibles de formules complexes, ou plus exactement de schémas généraux de formules, qui comprennent plusieurs connecteurs. Techniquement il suffit d'ajouter des colonnes intermédiaires pour les différentes étapes du calcul et ainsi on obtient progressivement le résultat final en réutilisant les résultats intermédiaires[37]. Ces calculs sont courants en logique, et ici ils peuvent nous être utiles car il y a une règle de logique qui dit que deux formules qui ont la même table de vérité sont logiquement (et sémantiquement) équivalentes, puisque cela veut dire qu'elles sont vraies dans exactement les mêmes modèles.

Regardons par exemple les dénotations de $[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$ puis de $\neg[\varphi \vee \psi]$ données dans le Tableau 2.3.

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

φ	ψ	$[\varphi \vee \psi]$	$\neg[\varphi \vee \psi]$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

TAB. 2.3 – Tables de vérité de $[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$ et de $\neg[\varphi \vee \psi]$

Les deux colonnes de résultats sont identiques, les deux formules sont logiquement (et sémantiquement) équivalentes. Pour illustrer cela, reprenons l'exemple (27) :

(27) $\neg[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]$

Cette formule peut littéralement traduire la phrase française « il est faux que Puck est un âne ou un farceur » ; en clair, cela signifie la même chose que « Puck n'est ni un âne, ni un farceur », autrement dit « Puck n'est pas un âne et Puck n'est pas un farceur », ce qui se traduit bien en (27)′ :

[37] Mais attention : il ne faut pas oublier d'énumérer sur les lignes de la table *toutes* les combinaisons possibles de valeurs de vérité pour les sous-formules de base prises en compte. Plus une formule complexe connecte de formules simples différentes, plus elle aura de lignes.

(27)′ $[\neg\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \wedge \neg\mathbf{farceur}(\mathbf{p})]$

Cette équivalence logique fait partie de ce qui est connu sont le nom de **lois de Morgan**. Il y en a une seconde qui est que $\neg[\varphi \wedge \psi]$ et $[\neg\varphi \vee \neg\psi]$ sont aussi logiquement équivalentes. On peut l'illustrer avec les exemples suivants : « il est faux que Puck est un âne et un farceur », c'est-à-dire « Puck n'est pas un âne farceur », ce qui veut bien dire « Puck n'est pas un âne ou bien Puck n'est pas farceur ». Les lois de Morgan peuvent donc s'avérer utiles pour comprendre certaines formules ou phrases négatives.

Théorème 2.1 (Lois de Morgan)
Une formule de la forme $\neg[\varphi \wedge \psi]$ et une formule de la forme $[\neg\varphi \vee \neg\psi]$ sont logiquement équivalentes.
Une formule de la forme $\neg[\varphi \vee \psi]$ et une formule de la forme $[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 2.5

1. Montrez, par la méthode des tables de vérité, que $[[\varphi \wedge \psi] \wedge \chi]$ et $[\varphi \wedge [\psi \wedge \chi]]$ sont logiquement équivalentes. NB : ici les tables auront 8 lignes.
2. De même pour $[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$ et $[\varphi \vee [\psi \vee \chi]]$.
3. Montrez que $[[\varphi \rightarrow \psi] \rightarrow \chi]$ et $[\varphi \rightarrow [\psi \rightarrow \chi]]$ *ne sont pas* logiquement équivalentes.

Les deux équivalences de l'exercice 2.5 disent finalement que par exemple lorsqu'on a deux conjonctions qui « se suivent » dans une formule, peu importe comment on les regroupe, c'est-à-dire comment on place les crochets, la dénotation de la formule reste toujours la même. On dit que la conjonction et la disjonction sont des connecteurs *associatifs* (comme le sont l'addition et la multiplication sur les nombres), et pour cette raison on peut s'autoriser à faire l'économie de ces crochets dans l'écriture des formules : ils n'ont pas d'impact sémantique. Ainsi on pourra écrire de temps en temps $[\varphi \wedge \psi \wedge \chi]$ et $[\varphi \vee \psi \vee \chi]$ à la place des quatre premières formules de l'exercice 2.5. Mais il faut bien garder à l'esprit que $[\varphi \wedge \psi \wedge \chi]$ n'est qu'une commodité d'écriture : en toute rigueur, ce n'est pas une formule bien formée de LO, mais juste un raccourci qui vaut indifféremment pour $[[\varphi \wedge \psi] \wedge \chi]$ ou $[\varphi \wedge [\psi \wedge \chi]]$.

En revanche, comme le montre la troisième partie du même exercice, $[\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \chi]$ n'est pas une écriture autorisée, cette (pseudo-)formule n'a vraiment aucun sens. De même on n'a pas le droit d'écrire $[\varphi \wedge \psi \vee \chi]$.

Il y a une autre règle de suppression des crochets que l'on peut s'accorder pour alléger les écritures de formules. Les crochets servent à regrouper les sous-formules à l'intérieur d'une formule complexe pour éviter toute équivoque et pour bien marquer le « champ d'application » d'un connecteur. Par conséquent lorsqu'une formule (mais pas une sous-formule !) est entièrement encadrée de crochets, ceux-ci ne servent pas à grand chose, car justement cette formule globale n'est connectée à aucune autre. Ainsi il est sémantiquement inoffensif de supprimer les crochets les plus extérieurs d'une formule et on peut écrire $\varphi \rightarrow \psi$ à la place de $[\varphi \rightarrow \psi]$ tant qu'il s'agit d'une formule autonome. Mais attention, cela ne concerne que les crochets complètement extérieurs : on n'a pas le droit de les supprimer dans $\neg[\varphi \wedge \psi]$ ou dans $\exists x[\textbf{elfe}(x) \wedge \textbf{farceur}(x)]$ (mais on a le droit d'écrire $\exists x\, \textbf{elfe}(x) \wedge \exists x\, \textbf{farceur}(x)$ pour $[\exists x\, \textbf{elfe}(x) \wedge \exists x\, \textbf{farceur}(x)]$).

Exercice 2.6
Montrez que les paires de formules suivantes sont chacune logiquement équivalentes :

1. φ et $\neg\neg\varphi$
2. $[\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\neg\varphi \vee \psi]$
3. $[\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\neg\psi \rightarrow \neg\varphi]$
4. $[\varphi \rightarrow [\psi \rightarrow \chi]]$ et $[[\varphi \wedge \psi] \rightarrow \chi]$
5. $[\varphi \wedge [\psi \vee \chi]]$ et $[[\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi]]$
6. $[\varphi \vee [\psi \wedge \chi]]$ et $[[\varphi \vee \psi] \wedge [\varphi \vee \chi]]$

Il n'est pas inutile de connaître par cœur ces équivalences (la n° 1 s'appelle d'ailleurs la *loi de la double négation* et la n° 3 la *loi de contraposition*[38]).

2.4.2 Disjonctions inclusive et exclusive

La table de vérité de la disjonction $\vee$, répétée dans le Tableau 2.4, de même que la règle (Sem.4b) nous disent que $[\varphi \vee \psi]$ est vraie si l'une des deux sous-formules est vraie et aussi lorsqu'elles sont vraies toutes deux. C'est ce qu'on appelle la **disjonction inclusive**, et c'est pourquoi elle est parfois prononcée « *et/ou* ». Il existe en logique un autre connecteur disjonctif, qu'on appelle la **disjonction exclusive** ; notons-la par le symbole $\mathbin{\mathrm{W}}$[39] ; sa table de vérité est donnée dans le Tableau 2.4.

φ	ψ	$[\varphi \vee \psi]$	$[\varphi \mathbin{\mathrm{W}} \psi]$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Tab. 2.4 – Tables de vérité des disjonction inclusive et exclusive

On voit que $[\varphi \mathbin{\mathrm{W}} \psi]$ est vraie si l'une des deux sous-formules est vraie mais pas les deux en même temps. C'est fromage ou dessert.

[38] Un exemple d'équivalence via la double négation est donnée par « *Marie fume* » et « *il est faux que Marie ne fume pas* ». La loi de contraposition peut s'illustrer par « *s'il y a de la fumée, il y a du feu* » et « *s'il n'y a pas de feu, il n'y a pas de fumée* ».

[39] Ce symbole n'est pas spécialement consacré dans la littérature logique. Mais à ma connaissance, il n'y a aucun consensus de notation clairement établi ; on trouve facilement les variantes suivantes : $\veebar$, $\triangledown$, $+$, $\oplus$, $\not\equiv$, etc., ce qui tend à montrer le côté relativement marginal de ce connecteur.

Une question importante qu'on a à se poser en sémantique, c'est de savoir si les expressions de la langue qui expriment la disjonction, en français « *ou* », « *ou bien* », « *soit..., soit...* », doivent s'analyser par une disjonction inclusive ou exclusive. On peut deviner la réponse puisque c'est $\vee$ et pas $\veebar$ qui a été introduit dans LO, mais regardons les choses plus précisément.

En fait, il peut sembler que la plupart (ou au moins un grand nombre) des phrases disjonctives du français sont plus naturellement comprises comme exprimant une disjonction exclusive plutôt qu'inclusive. Un exemple classique est (28) :

(28) Alice est dans sa chambre ou dans la salle de bain.

Il paraît assez évident que cette phrase ne suggère pas qu'Alice est peut-être à la fois dans sa chambre et dans la salle de bain. La disjonction en (28) a bien l'air exclusive. Remarquons au passage que, parmi les raisons qui peuvent amener un locuteur à utiliser une disjonction dans son énoncé, l'une des plus courantes est lorsqu'il ne dispose pas d'une information absolument certaine, que pour lui deux possibilités sont en balance. Mais cela ne veut pas dire que ces énoncés ne sont pas informatifs ; ils ne sont pas vagues ; (28) exclut tous les autres endroits où Alice peut être.

Les phrases suivantes fonctionnent de la même manière, en illustrant des disjonctions exclusives :

(29) Ce type, il s'appelle Hubert ou Herbert.

(30) Daniel travaille à Biarritz ou à Bayonne.

(31) Cet été pour les vacances, Adèle est allée en Espagne ou en Italie.

Mais il faut faire une remarque importante ici : ce n'est pas forcément parce que l'on comprend ces phrases comme exprimant une disjonction exclusive ou qu'elles nous semblent exprimer une disjonction exclusive que leur *sens* doit être analysé de la sorte. Nous savons à présent comment décrire le sens d'une phrase : ce sont ses conditions de vérité. Or demandons-nous dans quels cas la phrase (31) est vraie. Elle est vraie bien sûr si Adèle est effectivement allée en Espagne ou si elle est allée en Italie. Mais qu'en est-il si elle a fait deux voyages pendant ses vacances et qu'elle a visité les deux pays ? Dans ce cas, force est d'admettre que (31) est également vraie. Autrement dit, les conditions de vérité nous donnent clairement une disjonction inclusive. La phrase (32) en est un autre exemple. Imaginez un inspecteur menant une enquête et qui, après avoir recueilli des indices et des témoignages, énonce la conclusion suivante :

(32) Le coupable est roux ou il porte une perruque rousse.

Devra-t-on alors écarter un suspect qui à la fois serait roux et porterait une perruque rousse ? Bien sûr que non. Par conséquent, même si elle n'en a pas l'air, la phrase (32) a une structure sémantique de disjonction inclusive.

On peut cependant faire une double objection : d'abord les disjonctions des phrases (28)–(30) ont l'air « plus » exclusives qu'en (31) et (32), ensuite comment expliquer que malgré tout il y a une lecture exclusive qui se présente nettement lorsqu'on lit tous ces exemples ? Il y a plusieurs manières de répondre à cela.

Une première explication serait d'ordre strictement sémantique et grammaticale. Elle dirait que la conjonction « *ou* » du français[40] est ambiguë : il y aurait deux « *ou* », un inclusif et un exclusif. Ainsi (31) recevrait deux traductions possibles en LO :

(31)′ a. $[\mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{e}) \vee \mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{i})]$
b. $[\mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{e}) \veebar \mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{i})]$

Mais il a été montré (par Gazdar (1979) notamment) que cette analyse est difficilement défendable et on retient préférentiellement des explications plus pragmatiques.

D'abord il ne faut pas manquer d'observer dans les exemples (28) et (29) que, dans le cours normal des choses, les cas où les deux membres de la disjonction sont vrais (Alice est à deux endroits à la fois, le type porte deux prénoms usuels) sont hautement improbables, si ce n'est impossibles ou absurdes. Il s'agit là en fait d'une sorte de *présupposé* de bon sens, quelque chose que le locuteur et l'allocutaire savent ou présument ensembles et tacitement. Et cela se reflète dans les conditions de vérité : savoir si (28) est vraie lorsqu'Alice est dans les deux pièces à la fois est tout simplement sans intérêt, sans pertinence. Et on peut même dire que dans un tel cas, (28) n'est ni vraie ni fausse, mais hors de propos – ce qui est bien une propriété des présuppositions. Si on tient compte de cette présupposition, la disjonction n'a de valeur que pour dire qu'un et un seul des deux membres est vrai, ce qui provoque bien une lecture exclusive. Simplement ce qui fait l'exclusivité de la disjonction n'est pas affirmé par le locuteur mais présupposé, et ce n'est donc pas dans la structure sémantique de sa phrase. En bref, nos phrases ici sont sémantiquement des disjonctions inclusives qui par présupposition reviennent à des disjonctions exclusives.

Il y a une autre explication pragmatique, qui ne s'oppose pas à la première, et selon laquelle les lectures disjonctives exclusives sont des effets d'implicatures conversationnelles. L'idée est la suivante : une conjonction de deux formules $[\varphi \wedge \psi]$ est plus informative, plus précise que la disjonction de ces mêmes formules $[\varphi \vee \psi]$, car la conjonction est vraie dans moins de cas que la disjonction (cf. Tableau 2.1) et car $[\varphi \vee \psi]$ est une conséquence logique de $[\varphi \wedge \psi]$ (quand la conjonction est vraie la disjonction l'est aussi). Par conséquent, si un locuteur énonce la formule la moins informative, c'est qu'il est probable qu'il ne pense pas que la formule la plus informative soit vraie. Autrement dit, une implicature que l'on peut tirer normalement de $[\varphi \vee \psi]$ c'est $\neg[\varphi \wedge \psi]$. Et si on réunit les deux, cela nous donne : φ ou ψ et pas les deux à la fois, ce qui est bien l'interprétation de la disjonction exclusive. Précédemment, l'exclusivité était donnée a priori par une présupposition, ici elle est obtenue a posteriori par une implicature.

[40] Mais cela se retrouverait probablement dans toutes les langues.

Terminons ces observations avec le coup de grâce que nous pouvons porter à une analyse sémantique de la disjonction exclusive. Reprenons l'hypothèse qui suggérait que « *ou* » soit sémantiquement (ie lexicalement) ambigu entre $\vee$ et $\veebar$. Cela veut dire que toute phrase en « *ou* » reçoit deux traductions *plausibles* et qu'éventuellement ensuite l'une des deux soit écartée parce que peu appropriée dans le contexte.

Regardons alors ce qui se passe avec une disjonction multiple, c'est-à-dire à plus de deux membres, comme par exemple (33) :

(33) Marie a prévenu Pierre ou Albert ou Jacques.

Si « *ou* » est ambigu, alors (33) peut se traduire au moins de deux façons :

(33)′ a. $[[\mathbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{p}) \vee \mathbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{a})] \vee \mathbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{j})]$ ou
b. $[[\mathbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{p}) \veebar \mathbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{a})] \veebar \mathbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{j})]$

c'est-à-dire les schémas de formules $[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$ ou $[[\varphi \veebar \psi] \veebar \chi]$. Avant même d'analyser ces formules, on peut déjà expliciter les conditions de vérité de (33) simplement en regardant la phrase. On peut y voir effectivement deux lectures, une inclusive et une exclusive. Pour la lecture disjonctive inclusive, (33) est vraie si et seulement si Marie a prévenu *au moins un* des trois garçons – et donc c'est vrai aussi si elle en a prévenu deux ou les trois. Pour la lecture disjonctive exclusive c'est moins simple car il y a deux manières de voir les choses. On pourrait envisager une lecture exclusive faible qui dirait que (33) est vraie ssi Marie a prévenu au moins un des trois garçons mais pas tous les trois – ce serait donc vrai si elle en a prévenu deux. Mais cette interprétation semble peu naturelle et plutôt compliquée. L'autre lecture serait exclusive forte, elle dirait que (33) est vraie ssi Marie a prévenu *un seul* des trois garçons. Examinons maintenant ce que nous disent les tables de vérité de nos deux schémas de formules. Elles sont donnée dans le Tableau 2.5.

φ	ψ	χ	$[\varphi \vee \psi]$	$[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$	$[\varphi \veebar \psi]$	$[[\varphi \veebar \psi] \veebar \chi]$
1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

TAB. 2.5 – Tables de vérité de disjonctions à trois termes

La table de $[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$ est bien conforme à nos attentes. Quant à celle de $[[\varphi \veebar \psi] \veebar \chi]$ elle correspond *presque* à la lecture exclusive forte ; « presque » à cause de la première ligne qui ne donne pas le résultat escompté. Et c'est beaucoup plus grave qu'il n'y paraît car si on recommence l'exercice avec une disjonction à quatre ou cinq membres, on constatera une étonnante régularité : une disjonction exclusive multiple (en $\veebar$) est vraie ssi il y a un *nombre impair* de sous-formules atomiques connectées qui sont vraies. Et cette règle n'a décidément rien à voir avec ce que peut vouloir dire un locuteur qui énonce une phrase disjonctive. Autrement dit, le connecteur $\veebar$ donne des résultats erronés quand il s'agit d'exprimer le sens des phrases du français.

La conclusion de tout cela est que d'un point vue strictement sémantique, c'est-à-dire concernant uniquement les conditions de vérité, l'expression d'une disjonction en français sera toujours traduite par une disjonction inclusive, $\vee$. C'est à un autre niveau de l'analyse (pragmatique) que se manifeste le caractère exclusif de l'interprétation d'une disjonction. Nous n'utiliserons donc pas $\veebar$ dans LO.

2.4.3 Implication matérielle

Le connecteur de l'**implication matérielle**, $\rightarrow$, a été présenté comme étant ce qui permet de traduire en LO les constructions conditionnelles en « si..., (alors)... ». Exemple :

(34) Si Démétrius n'aime pas Héléna, alors elle est (/sera) triste.
$[\neg\, \mathbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_3}) \rightarrow \mathbf{triste}(\mathbf{h_3})]$

Introduisons d'abord deux éléments de vocabulaire attachés aux implications :

Définition 2.13 (Antécédent et conséquent d'une implication)
Dans une implication de la forme $[\varphi \rightarrow \psi]$, la sous-formule φ s'appelle l'**antécédent** de l'implication, et la sous-formule ψ son **conséquent**.
Par extension on parle aussi de l'antécédent et du conséquent d'une phrase conditionnelle.

Les conditions de vérité données en (Sem.4c) et la table de vérité, reproduite dans le Tableau 2.6, peuvent paraître un peu éloignées de ce que l'on attend de la sémantique d'une structure conditionnelle du français en « *si* ». Il faut d'abord savoir que la formulation de (Sem.4c) n'est qu'une façon de dire parmi d'autres variantes équivalentes ; on aurait pu tout aussi bien écrire : $[\![[\varphi \rightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ si et seulement si, si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ alors $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ aussi. Mais la version (Sem.4c) a le mérite d'être plus analytique et moins alambiquée.

φ	ψ	$[\varphi \rightarrow \psi]$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

TAB. 2.6 – Table de vérité de $\rightarrow$

Ce qui gêne souvent dans la table de vérité de $\rightarrow$, c'est sa troisième ligne : comment le faux peut-il impliquer le vrai ? ou comment de quelque chose de faux peut-on déduire quelque chose de vrai ?

D'abord, il faut bien être avisé du fait que l'implication matérielle n'est pas la même chose que la déduction ; ce sont deux concepts orthogonaux. L'implication matérielle est un symbole de LO qui permet d'écrire des formules ; la déduction est un type de raisonnement, ou éventuellement un jugement que l'on porte sur une forme de raisonnement (on dit par exemple que tel raisonnement est déductif). Une manière d'établir une déduction est d'utiliser la relation de conséquence logique que nous avons vue au chapitre précédent. On la notait par $\models$, et ce symbole ne fait pas partie de LO, c'est un méta-symbole. Il sert à *affirmer* qu'il y a une conséquence logique entre des phrases, et on a bien vu que cette relation ne s'établit pas n'importe comment (nous y reviendrons en § 2.4.5). Au contraire, la règle syntaxique (Syn.4) nous autorise à placer le connecteur $\rightarrow$ entre n'importe quelles formules, pourvu qu'elles soient bien formées. C'est que $[\varphi \rightarrow \psi]$ en soi n'affirme rien, quand on l'écrit on ne dit pas si elle est vraie ou fausse (d'où l'utilité des modèles et de $[\![\,]\!]$). Ainsi on a tout à fait le droit d'écrire $[\varphi \rightarrow \neg\varphi]$ puisque c'est une EBF, alors qu'écrire $P \models \neg P$ c'est commettre une flagrante erreur de logique. Car ces deux écritures ne se situent pas sur le même plan : la première fait partie de LO, le langage objet qu'observent et étudient les sémanticiens, alors que la seconde appartient au métalangage, dans lequel s'expriment les sémanticiens.

Ensuite, on doit remarquer que le faux n'implique pas que le vrai, il implique aussi le faux (cf. la table de vérité). Autrement dit le faux implique n'importe quoi[41] : lorsque l'antécédent d'une implication est faux, la valeur de son conséquent n'est pas discriminante. Ce qui est surtout déterminant, ce sont les deux premières lignes de la table de vérité. Cela peut s'illustrer avec l'exemple suivant :

(35) Si je pars de chez moi après 8h, je rate mon train.

C'est une phrase que je peux énoncer très raisonnablement si je dois prendre un train qui part à 8h20 et que je sais pertinemment qu'il me faut au minimum 20 minutes pour aller à la gare[42]. Maintenant imaginons que finalement je suis parti à 7h40 et que malgré tout, à cause d'une panne de métro ou d'un embouteillage, j'ai quand-même raté mon train (c'est-à-dire on imagine un modèle où les chose se sont passées ainsi). Ainsi l'antécédent de (35) est faux et son conséquent est vrai. Doit-on alors en conclure que dans ce cas (35) est fausse ? Pas du tout, elle reste vraie, simplement parce qu'elle ne se prononce pas sur ce qui se passe dans le cas où je pars avant 8h (ie lorsque l'antécédent est faux).

Il faut tout de même mentionner un effet de sens qui se produit assez souvent avec des phrases conditionnelles, et qui là encore est d'ordre pragmatique. Prenons l'exemple de parents qui disent à leurs enfants :

[41] C'est même une loi logique fameuse et depuis longtemps identifiée sous le joli nom de *e falso sequitur quodlibet* (du faux s'ensuit n'importe quoi, ou le faux implique tout).

[42] Pour les besoins de la démonstration, on fait aussi l'hypothèse extravagante que les trains partent toujours à l'heure.

(36) Si vous êtes sages, on ira au parc d'attraction cet après-midi.

Cet énoncé est une sorte de promesse. Et comme précédemment, plaçons-nous dans une situation où l'antécédent est faux et le conséquent vrai : les enfants n'ont pas été sages du tout et les parents les ont emmenés au parc. Dans ce cas, on ne peut pas vraiment dire qu'ils n'ont pas tenu leur promesse, techniquement ils ne se sont pas parjurés (ça aurait été le cas si les enfants ayant été sages ils ne soient pas emmenés au parc). En revanche, on peut estimer que les parents sapent ainsi dangereusement leur autorité et leur crédibilité. La raison en est que, comme l'a montré, entre autres, Ducrot (1984), une affirmation de la forme de (36) s'accompagne habituellement d'un *sous-entendu* (et donc probablement d'une implicature conversationnelle) de la forme de (37) :

(37) Si vous n'êtes pas sages, on n'ira pas au parc d'attraction cet après-midi.

C'est pourquoi une phrase comme (36) se comprend souvent comme exprimant une équivalence matérielle ($\leftrightarrow$) plutôt qu'une implication, car l'affirmation (36) ($[\varphi \rightarrow \psi]$) complétée du sous-entendu (37) ($[\neg\varphi \rightarrow \neg\psi]$) revient à « on ira au parc d'attraction, si et seulement si vous êtes sages ». Cet effet d'équivalence, comme l'effet d'exclusivité pour la disjonction, est le fruit d'un raisonnement pragmatique[43], mais il n'est pas inscrit dans la structure sémantique de la phrase de départ (36).

Pour conclure sur l'implication matérielle, disons qu'il faut toujours penser à évaluer *globalement* la dénotation d'une phrase conditionnelle. Une implication ou une conditionnelle met en place une hypothèse exprimée par l'antécédent qui, seulement si elle est vraie, nous invite à examiner (ie à vérifier) une conséquence, c'est-à-dire le conséquent. Si l'hypothèse est fausse, alors globalement l'implication n'a rien à signaler et donc elle est – trivialement – vraie. L'hypothèse, donc l'antécédent, a le statut de **condition suffisante** dans l'implication. C'est pourquoi on peut s'aider à bien interpréter une phrase conditionnelle en prononçant l'implication par « *il suffit que* »[44] (mais surtout pas « *il faut que* » !), comme par exemple (36)′ qui est une bonne variante logique de (36).

(36)′ Il suffit que vous soyez sages pour que nous allions au parc d'attraction cet après-midi.

2.4.4 La quantification

Il est temps de revenir aux formules quantifiées de LO et à leur sémantique. Pour cela, il nous faut examiner quelques propriétés formelles et quelques notions

[43] Très informellement, ce raisonnement peut se résumer ainsi : si les parents énoncent (36) tout en envisageant la possibilité d'emmener les enfants au parc quoi qu'il arrive, alors ça ne sert à rien de mettre une condition à la promesse, car dans ce cas, il leur suffirait de dire simplement : « on ira au parc cet après-midi ».

[44] C'est-à-dire que $[\varphi \rightarrow \psi]$ peut se prononcer en « *si* φ*,* ψ » ou « *il suffit que* φ *pour que* ψ ».

attachées aux formules qui comportent des symboles de quantification. La plus fondamentale est celle de **portée**.

Définition 2.14 (Portée d'un quantificateur)
Si une formule φ contient une sous-formule de la forme $\exists v\psi$ ou $\forall v\psi$, on dit que ψ est la **portée** respectivement du quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$ dans φ.

Regardons tout de suite un exemple (volontairement compliqué, et laissons de côté ce que la formule peut bien signifier) :

(38) $\neg\exists x\exists y[\forall z[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \to \mathbf{aimer}(y,z)] \wedge \mathbf{aimer}(x,y)]$

En (38), la portée de $\exists w$ est $\mathbf{aimer}(z,w)$, celle de $\forall z$ est $[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \to \mathbf{aimer}(y,z)]$, celle de $\exists y$ est $[\forall z[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \to \mathbf{aimer}(y,z)] \wedge \mathbf{aimer}(x,y)]$ et celle de $\exists x$ est $\exists y[\forall z[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \to \mathbf{aimer}(y,z)] \wedge \mathbf{aimer}(x,y)]$.

La portée d'un quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$ est simplement la sous-formule (complète !) qui le suit immédiatemment dans la formule globale, ou, si l'on préfère, la sous-formule qu'on a utilisée en appliquant la règle (Syn.5) au moment d'introduire $\exists v$ ou $\forall v$ lors de la construction de la formule globale.

Remarquez qu'ici on appelle *quantificateur* une séquence composée d'un symbole de quantification suivi d'une variable. A ce propos, la formulation de la définition 2.14 est un peu simplifiée ; pour être tout à fait précis il faut en fait l'énoncer en disant : « ... on dit que ψ est la portée *de cette occurrence particulière* du quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$, respectivement, dans φ ». En effet, rien empêche d'avoir plusieurs fois par exemple $\exists x$ dans une formule, et ce qui nous intéresse ici c'est rôle du quantificateur à un certain endroit de la formule. Ainsi dans :

(39) $\exists x\,\mathbf{mari\text{-}de}(x,\mathbf{t_2}) \wedge \exists x[\mathbf{aimer}(\mathbf{t_2},x) \wedge \neg\mathbf{mari\text{-}de}(x,\mathbf{t_2})]$

$\mathbf{mari\text{-}de}(x,\mathbf{t_2})$ est la portée de la première occurrence de $\exists x$ et $[\mathbf{aimer}(\mathbf{t_2},x) \wedge \neg\mathbf{mari\text{-}de}(x,\mathbf{t_2})]$ la portée de sa seconde occurrence.

La quantification, par nature, concerne les variables. Sémantiquement la portée d'un quantificateur c'est, en quelque sorte, son rayon d'action : elle délimite la zone où se trouvent les variables qui sont concernées par ce quantificateur dans une formule. « Concerner » n'est pas un terme retenu en sémantique formelle ; on parle plutôt des **variables liées** par un quantificateur. Et lorsqu'une variable n'est pas liée dans une formule, on dit qu'elle y est **libre**.

Définition 2.15 (Variables libres, variables liées)

1. L'occurrence d'une variable v dans une formule φ est dite **libre** dans φ si elle n'est dans la portée d'aucun quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$.
2. Si $\exists v\psi$ (ou $\forall v\psi$) est une sous-formule de φ et si v est libre dans ψ, alors cette occurrence de v est dite **liée** par le quantificateur $\exists v$ (ou $\forall v$).

Là aussi, *libre* et *liée* sont des propriétés d'*occurrences* de variables, c'est-à-dire de variables situées à un certain endroit dans une formule. Regardons par exemple les variables de (40) :

(40) $\forall x[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \exists y\, \mathbf{elfe}(y)]$

Et examinons les choses pas à pas. Localement dans $\mathbf{elfe}(y)$, y est libre puisque dans cette sous-formule il n'y a pas de quantificateur. Donc cette occurrence de y est liée par $\exists y$ dans $\exists y\, \mathbf{elfe}(y)$ en vertu de la définition 2.15–2. De même dans $[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \exists y\, \mathbf{elfe}(y)]$, x et la première occurrence de y sont libres (et la seconde occurrence de y est liée, comme on vient de le voir). Donc x est liée par $\forall x$ dans (40). Par contre, la première occurrence de y, elle, reste libre car elle est dans la portée d'un $\forall x$ mais pas dans celle d'un $\forall y$ ou d'un $\exists y$.

On pourrait se demander pourquoi la définition 2.15 est si compliquée et pourquoi faut-il définir la notion de variable liée à partir de celle de variable libre. Ne suffirait-il pas de dire simplement qu'une variable v est liée par $\exists v$ ou $\forall v$ si elle se trouve dans sa portée ? Eh non, cela ne suffirait pas, car des quantificateurs sur v peuvent se trouver eux-mêmes dans la portée d'un autre quantificateur sur v. Par exemple :

(41) $\forall x[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \exists x\, \mathbf{elfe}(x)]$

Ici y est libre et le premier x est lié par $\forall x$, comme en (40). Mais le second x, lui, n'est pas lié par $\forall x$, même s'il est dans sa portée. Car il n'est pas libre dans $[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \exists x\, \mathbf{elfe}(x)]$, il est lié par $\exists x$.

Le principe de la définition 2.15 en fait est qu'une variable v libre dans une (sous-)formule φ est toujours susceptible d'être ensuite liée par un $\exists v$ ou $\forall v$ qui serait placé devant φ. Et il est très important de savoir reconnaître les variables liées, notamment pour l'interprétation de la quantification puisqu'évidemment les quantificateurs quantifient sur les variables qu'ils lient.

Exercice 2.7
Pour chacune des formules suivantes, dites : *i*) quelle est la portée de chaque quantificateur, *ii*) quelles sont les occurrences de variables libres (s'il y en a), et *iii*) et par quels quantificateurs sont liées les autres variables.

1. $\exists x[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \mathbf{\hat{a}ne}(x)]$
2. $\exists x\, \mathbf{aimer}(x,y) \wedge \mathbf{\hat{a}ne}(x)$
3. $\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x,y) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(x)$
4. $\forall x[\exists y\, \mathbf{aimer}(x,y) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(x)]$
5. $\neg\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x,y) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(x)$
6. $\neg\mathbf{\hat{a}ne}(x) \rightarrow [\neg\forall y[\neg\mathbf{aimer}(x,y) \vee \mathbf{\hat{a}ne}(x)] \rightarrow \mathbf{elfe}(y)]$
7. $\neg\exists x[\mathbf{aimer}(x,y) \vee \mathbf{\hat{a}ne}(y)]$
8. $\neg\exists x\, \mathbf{aimer}(x,x) \vee \exists y\, \mathbf{\hat{a}ne}(y)$
9. $\forall x \forall y[[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \mathbf{\hat{a}ne}(y)] \rightarrow \exists z\, \mathbf{mari\text{-}de}(x,z)]$
10. $\forall x[\forall y\, \mathbf{aimer}(y,x) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(y)]$

Maintenant intéressons-nous aux conditions de vérité des formules (et des phrases) qui contiennent des quantificateurs. Quand ces formules sont simples, leurs conditions de vérité sont assez faciles à caractériser, et elles nous donnent le principe général d'interprétation de la quantification. Par exemple, la formule $\exists x\, \textbf{âne}(x)$ est vraie dans un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ ssi il y a un individu, au moins, de $\mathcal{A}$ qui appartient à $F(\textbf{âne})$, l'ensemble des ânes de $\mathcal{M}$. Et $\forall x\, \textbf{âne}(x)$ est vraie dans $\mathcal{M}$ ssi tous les individus de $\mathcal{A}$ appartiennent à $F(\textbf{âne})$ (tout le monde est un âne). Et *très* informellement, on généralisera en disant que $[\![\exists x \varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi la formule φ est vraie pour au moins un individu de $\mathcal{A}$ et $[\![\forall x \varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi φ est vraie pour tout individu de $\mathcal{A}$. Ainsi comme avec les autres règles sémantiques de LO l'interprétation se fait par simplification progressive de la formule : on se débarrasse du quantificateur et on examine la dénotation de φ – une fois avec $\exists x$ et autant de fois que nécéssaire avec $\forall x$.

Mais il nous faut ici être précis sur ce que cela signifie lorsqu'on dit qu'une formule φ est *vraie pour tel ou tel individu* de $\mathcal{A}$. D'abord si le quantificateur lie la variable x, on doit regarder les individus qui *en tant que* x rendent vraie la formule. Cela veut dire simplement que les individus à tester doivent en quelque sorte prendre la place de la variable dans la formule φ pour qu'ensuite on vérifie sa dénotation. Mais les individus appartiennent au modèle, pas à LO, ils ne peuvent pas intervenir eux-mêmes dans les formules. C'est pourquoi une manière de procéder consiste à utiliser les constantes comme des représentants des individus dans LO. Le mécanisme interprétatif de la quantification peut alors s'exprimer facilement pour toute formule de LO, il suffit de dire que $[\![\exists x \varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi il y au moins une constante d'individu telle que si on remplace x par cette constante dans φ, φ devient alors vraie dans $\mathcal{M}$, et $[\![\forall x \varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi quand on remplace x successivement par toutes les constantes d'individus, φ est alors à chaque fois vraie dans $\mathcal{M}$.

Cette façon d'interpréter les formules quantifiées n'est pas complètement satisfaisante sur le plan théorique, car elle se débarrasse des variables (en les remplaçant par des constantes) simplement parce que nous ne savons pas ce qu'est $[\![x]\!]^{\mathcal{M}}$ (effectivement nous n'avons jamais défini la dénotation d'une variable dans les règles des définitions 2.11 et 2.12). C'est pourquoi nous verrons au chapitre suivant une autre façon, plus rigoureuse et régulière, d'interpréter la quantification. Cependant, sur le plan pratique, la méthode présentée ici est tout à fait opérationnelle, *à condition* de poser une contrainte particulière sur LO qui est qu'à chaque individu du domaine $\mathcal{A}$ d'un modèle est associé au moins une constante de LO. C'est le cas par exemple dans le modèle-jouet $\mathcal{M}_1$ (p. 63), mais a priori rien n'oblige à ce que cela soit toujours ainsi ; ce serait même peu réaliste tant qu'on assimile les constantes aux noms propres. Mais cette contrainte est nécessaire ici puisque les constantes sont censées jouer le rôle des individus. Disons qu'elle ajoute une propriété formelle au système de LO sans pour autant avoir un impact sur l'interprétation sémantique de la langue naturelle : on considérera que chaque nom propre de la langue se traduit par une constante de LO, mais que toute constante ne traduit pas forcément un nom propre.

Pour formaliser proprement cette méthode d'interprétation par substitution de constantes, on a simplement besoin d'introduire explicitement la procédure de remplacement des variables par des constantes. C'est une opération générale sur la structure des formules, que nous noterons comme suit :

Notation 2.8 (Substitution)
Soit φ une formule de LO, v une variable et t un terme. On note $[t/v]\varphi$ le résultat de la **substitution** dans φ de *toutes les occurrences libres* de v par t.

La substitution ne doit concerner que les occurrences libres de la variable, car elle sera déclenchée par un quantificateur ; et les occurrences libres de x dans φ sont bien celles qui sont liées par $\exists x$ dans $\exists x\varphi$. (42) nous donne un exemple de l'opération[45] :

(42) $[\mathbf{b}/x][\mathbf{\hat{a}ne}(x) \wedge \forall y[\mathbf{aimer}(x, y) \vee \exists x\, \mathbf{mari\text{-}de}(y, x)]]$
$= [\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{b}) \wedge \forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{b}, y) \vee \exists x\, \mathbf{marie\text{-}de}(y, x)]]$

A présent nous pouvons formuler les règles d'interprétation systématiques des formules quantifiées :

Définition 2.16 (Interprétation des formules quantifiées)
(Sem.5) a. $[\![\exists v\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi on trouve (au moins) une constante γ telle que $[\![[\gamma/v]\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$
b. $[\![\forall v\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour toute constante γ, $[\![[\gamma/v]\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

En somme, ces règles transposent sur des constantes les quantifications qui sont indiquées sur des variables dans les formules ; et comme chaque individu est représenté par une constante, cela revient bien à effectuer les quantifications sur les individus du modèle.

Illustrons l'application de ces règles en calculant la dénotation des formules suivantes par rapport à $\mathcal{M}_1$ (p. 63).

(43) $\exists x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]$

La règle (Sem.5a) nous dit que $[\![\exists x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi il existe une constante γ telle que $[\![\mathbf{elfe}(\gamma) \wedge \mathbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Dans cette écriture, γ n'est qu'une constante virtuelle, et pour montrer que (43) est vraie dans $\mathcal{M}_1$, il suffit donc de trouver une (véritable) constante qui fonctionne en tant que γ. En examinant $\mathcal{M}_1$ on voit qu'on peut prendre par exemple la constante $\mathbf{o}$ (et poser ainsi $\gamma = \mathbf{o}$). En effet $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{o}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, car $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, car $F_1(\mathbf{o}) =$ OBÉRON $\in F_1(\mathbf{elfe})$ et OBÉRON $\in F_1(\mathbf{farceur})$ (on applique ici les règles (Sem.4a) et (Sem.1a)). On a ainsi montré que $[\![(43)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$: il existe bien un elfe farceur dans $\mathcal{M}_1$.

Le mécanisme d'interprétation est similaire lorsqu'on a plusieurs quantificateurs existentiels :

[45] L'opérateur de remplacement noté $[\mathbf{b}/x]$ ne fait pas partie de LO, c'est juste un moyen notationnel qui fait passer d'une formule à une autre.

(44) $\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)$

Toujours selon (Sem.5a), $[\![\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi on trouve une constante γ telle que $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(\gamma, y)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Prenons $\gamma = \mathbf{t_1}$; nous avons donc maintenant à calculer la valeur de $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, y)]\!]^{\mathcal{M}_1}$. Là encore (Sem.5a) nous dit que $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, y)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi on trouve une constante γ telle que $[\![\mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, \gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Et là encore, il suffit de trouver une constante qui marche parmi celles dont on dispose. Prenons donc maintenant $\gamma = \mathbf{h_1}$. Et nous avons bien $[\![\mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, \mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, car $F_1(\mathbf{t_1}) =$ Thésée, $F_1(\mathbf{h_1}) =$ Hippolyta et $\langle$Thésée, Hippolyta$\rangle \in F_1(\mathbf{aimer})$ (cf. p. 63). Nous avons donc trouvé deux constantes qui font l'affaire et cela prouve que $[\![(44)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$: il y a quelqu'un qui aime quelqu'un dans $\mathcal{M}_1$.

Bien sûr, on aurait pu mener cette démonstration en utilisant d'autres constantes, par exemple **l** et $\mathbf{h_2}$, ou **d** et $\mathbf{h_2}$, ou $\mathbf{h_1}$ et $\mathbf{t_1}$, etc. Si on avait choisi **p** pour la première constante (ie pour remplacer x), on n'aurait pas trouvé de seconde constante adéquate pour y, mais cela n'a pas d'importance car pour qu'une formule existentielle soit vraie, il suffit qu'au moins une constante la satisfasse ; peu importe celles qui échouent. L'exercice consiste donc à bien choisir les constantes qui prouvent la vérité de la formule.

Evidemment c'est différent lorsqu'il s'agit de prouver qu'une formule existentielle est fausse ou qu'une formule universelle est vraie. Commençons par calculer la dénotation dans $\mathcal{M}_1$ de l'universelle (45) :

(45) $\forall x[\mathbf{elfe}(x) \rightarrow \mathbf{farceur}(x)]$

La règle (Sem.5b) dit que $[\![\forall x[\mathbf{elfe}(x) \rightarrow \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi pour *toutes les* constantes γ, on a $[\![\mathbf{elfe}(\gamma) \rightarrow \mathbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. La démonstration ici est plus longue : il va falloir effectuer le calcul pour $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$, **l**, **d**, **e**, **p**, **o**, $\mathbf{t_2}$ et **b** (donc 11 calculs !). Heureusement la table de vérité de $\rightarrow$ va nous permettre de sauter rapidement des étapes. Souvenons-nous que lorsque l'antécédent d'une implication est faux, alors l'implication entière est vraie, quelle que soit la valeur du conséquent. Or dans les cas où γ est $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$, **l**, **d**, **e** ou **b**, on sait que $[\![\mathbf{elfe}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ car aucun des individus dénotés par ces constantes n'est dans $F_1(\mathbf{elfe})$. Donc pour ces huit constantes, on sait tout de suite que $[\![\mathbf{elfe}(\gamma) \rightarrow \mathbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Ce qu'il reste à vérifier, et ce qui est déterminant pour la formule, ce sont les cas où γ est **p** ou **o** ou $\mathbf{t_2}$ (constantes pour lesquelles $[\![\mathbf{elfe}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$). Et c'est bien normal puisque (45) traduit la phrase « *tous les elfes sont farceurs* » – phrase qui ne s'intéresse qu'aux individus qui sont des elfes. Commençons pas **p** ; $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ car Puck $\in F_1(\mathbf{farceur})$, et donc $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. La même démonstration vaut pour **o**, car Obéron $\in F_1(\mathbf{farceur})$, et pour $\mathbf{t_2}$, car Titania $\in F_1(\mathbf{farceur})$. Ainsi $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{o}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_2}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{t_2})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Donc $[\![\mathbf{elfe}(\gamma) \rightarrow \mathbf{farceur}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ pour toute constante γ, ce qui prouve bien que $[\![(45)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$.

Pour résumer la méthode d'interprétation des formules quantifiées, on peut considérer l'algorithme extrêmement minutieux suivant :

- pour calculer $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$, on passe en revue chaque constante γ, on calcule $[\![[\gamma/x]\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$ et on s'arrête dès qu'on trouve le résultat 1 ; dans ce cas cela montre que $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$; en revanche, si pour tous les γ on a trouvé 0 (ie on a jamais trouvé 1), alors c'est que $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$;
- pour calculer $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$, on passe en revue chaque constante γ, on calcule $[\![[\gamma/x]\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$ et si à chaque fois le résultat est 1, c'est que $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$; au contraire dès qu'on trouve le résultat 0, on peut s'arrêter, car cela suffit à prouver que $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

Cette procédure nous indique du même coup les « conditions de fausseté » d'une formule quantifiée, ou si l'on préfère, les conditions de vérité de sa négation.

(46) $\exists x[\mathbf{\hat{a}ne}(x) \wedge \mathbf{triste}(x)]$

$[\![(46)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ car *il n'existe pas* de constante γ telle que $[\![\mathbf{\hat{a}ne}(\gamma) \wedge \mathbf{triste}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Pour le démontrer très rigoureusement, il faudrait effectuer le calcul pour les onze constantes et montrer que le résultat est toujours 0.

(47) $\forall x[\mathbf{farceur}(x) \rightarrow \mathbf{elfe}(x)]$

$[\![(47)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ car *il existe au moins une* constante γ telle que $[\![\mathbf{farceur}(\gamma) \rightarrow \mathbf{elfe}(\gamma)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. Cette constante est $\mathbf{t_1}$, car $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. En effet, si quelque chose n'est pas vrai de tous les individus, c'est qu'il existe au moins un individu pour lequel c'est faux.

Ces exemples illustrent la dualité bien connue qu'entretiennent entre eux les deux types de quantificateurs : la négation d'une formule existentielle est une formule universelle, et la négation d'une formule universelle est une formule existentielle. Je ne vais pas donner ici le détail de la démonstration, mais nous pouvons facilement nous convaincre de ces équivalences en décortiquant un peu les exemples (46) et (47).

La négation de (46) (ie $\neg\exists x[\mathbf{\hat{a}ne}(x) \wedge \mathbf{triste}(x)]$) signifie qu'il n'existe pas d'individu qui soit à la fois un âne et triste, autrement dit pour tout individu (ou toute constante γ) ou bien ce n'est pas un âne ou il n'est pas triste, ce qui peut se reformuler en : pour tout individu, s'il est un âne, alors il n'est pas triste (tout âne est non-triste). Et cela, ce sont bien les conditions de vérité d'une formule universelle, à savoir :

(48) $\forall x[\neg\mathbf{\hat{a}ne}(x) \vee \neg\mathbf{triste}(x)]$
ou (c'est équivalent)[46] :
$\forall x[\mathbf{\hat{a}ne}(x) \rightarrow \neg\mathbf{triste}(x)]$

Remarquons aussi que (48) (qui équivaut à $\neg$(46)) traduit également la phrase « *aucun âne n'est triste* ». Une phrase en *aucun* s'analyse par une quantification universelle du type (48) ou, ce qui revient au même, par la négation d'une existentielle.

[46] Cf. l'équivalence logique n° 2 dans l'exercice 2.6, p. 68.

Quant à la négation de (47), c'est-à-dire $\neg\forall x[\textbf{farceur}(x) \rightarrow \textbf{elfe}(x)]$, ses conditions de vérité disent qu'il y a au moins un individu qui est farceur mais pas un elfe, ce qui correspond bien à la formule existentielle suivante :

(49) $\exists x[\textbf{farceur}(x) \wedge \neg\textbf{elfe}(x)]$

En effet $\neg$(47), « *il n'est pas vrai que tous les farceurs sont des elfes* », veut dire la même chose que « *il y a au moins un farceur qui n'est pas elfe* » (49).

Récapitulons cette dualité entre $\exists$ et $\forall$ par le théorème suivant :

Théorème 2.2
Les quatres paires de formules suivantes sont des équivalences logiques :

1. $\neg\exists x\varphi$ et $\forall x\neg\varphi$
2. $\neg\forall x\varphi$ et $\exists x\neg\varphi$
3. $\neg\exists x\neg\varphi$ et $\forall x\varphi$
4. $\neg\forall x\neg\varphi$ et $\exists x\varphi$

Les deux dernières équivalences se déduisent directement des deux premières et de la loi de double négation vue *supra* dans l'exercice 2.6.

Exercice 2.8
Calculez par rapport à $\mathcal{M}_1$ (cf. p. 63) la dénotation des formules suivantes :

1. $\forall x[\textbf{elfe}(x) \wedge \textbf{farceur}(x)]$
2. $\forall x[\textbf{elfe}(x) \rightarrow \neg\textbf{triste}(x)]$
3. $\neg\exists x[\textbf{âne}(x) \wedge \textbf{elfe}(x)]$
4. $\exists x\forall y\, \textbf{aimer}(y, x)$
5. $\forall y\exists x\, \textbf{aimer}(y, x)$

Pour chaque formule, proposer une phrase en français qui peut se traduire par cette formule.
Comparer la formule n° 1 avec la formule (45) *supra*.

Pour conclure cette partie sur la quantification, voici en Table 2.7 un petit *vade-mecum* de traduction français–LO de phrases quantifiées typiques. N représente un substantif quelconque et V un verbe intransitif (ou éventuellement un groupe verbal simple) et $\mathbf{n}$ et $\mathbf{v}$ représentent les prédicats qui traduisent respectivement N et V.

Les formules qui sont dans une même cellule du tableau sont équivalentes, ce sont donc de simples variantes de traduction en LO, cela ne marque pas d'ambiguïté. En revanche, la tournure « tous les N ne V pas » est réellement ambiguë. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

Exercice 2.9 (Quantificateurs et connecteurs)
Indiquez (informellement[47]) les conditions de vérité des formules suivantes :

[47] C'est-à-dire en français, sans entrer dans les détails techniques.

Un N V Des N V	$\exists x[\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{v}(x)]$
Tout/chaque N V Tous les N V Les N V	$\forall x[\mathbf{n}(x) \rightarrow \mathbf{v}(x)]$
Un N ne V pas Des N ne V pas Pas tous les N ne V Tout/chaque/tous les N ne V pas	$\exists x[\mathbf{n}(x) \wedge \neg\mathbf{v}(x)]$ $\neg\forall x[\mathbf{n}(x) \rightarrow \mathbf{v}(x)]$
Aucun N ne V Tout/chaque/tous les N ne V pas Les N ne V pas	$\neg\exists x[\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{v}(x)]$ $\forall x[\mathbf{n}(x) \rightarrow \neg\mathbf{v}(x)]$

Tab. 2.7 – Schémas de traductions du français en LO

1. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \wedge \mathbf{gaucher}(x)]$
2. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \vee \mathbf{gaucher}(x)]$
3. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \rightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$
4. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \leftrightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$
5. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \wedge \mathbf{gaucher}(x)]$
6. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \vee \mathbf{gaucher}(x)]$
7. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \rightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$
8. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \leftrightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$

Quelles sont celles qui peuvent être des traductions de phrases simples et naturelles du français ?

Il est bon de se souvenir que lorsqu'on traduit des phrases du français (ou de toute autre langue naturelle) il faut toujours s'attendre à ce que $\exists$ aille de paire avec $\wedge$ et $\forall$ avec $\rightarrow$.

2.4.5 Quelques définitions logiques

Nous avons maintenant les moyens formels de définir certaines notions vues dans le chapitre 1.

Notation 2.9 (Satisfaction)
Si une formule φ est vraie dans un modèle $\mathcal{M}$, c'est-à-dire si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, on dit que φ est **satisfaite** par $\mathcal{M}$, ou encore que $\mathcal{M}$ **satisfait** φ.
On note alors : $\mathcal{M} \models \varphi$.

Attention : le symbole $\models$ est à double emploi. Il exprime soit la satisfaction d'une formule par un modèle, soit la conséquence logique entre des phrases ou des formules que nous avions vue au chapitre 1. En toute rigueur nous devrions utiliser deux symboles différents. D'ailleurs on trouve parfois la variante de notation $\models_{\mathcal{M}} \varphi$ pour exprimer la satisfaction de φ par $\mathcal{M}$. Mais normalement il n'y a pas de confusion à craindre : si on trouve un modèle à la gauche de $\models$, le symbole désigne la satisfaction, si on trouve une ou plusieurs formules, il désigne la conséquence logique.

Dans le chapitre 1, la conséquence logique entre deux phrases (ou deux formules) était définie en disant que dans tous les cas où la première phrase est vraie, la seconde l'est aussi. Maintenant nous savons ce qu'est formellement un cas : c'est un modèle. La définition précise se donne donc dans ces termes : $\varphi \models \psi$ si et seulement si dans tous les modèles par rapport auxquels φ est vraie, ψ est vraie aussi.

Définition 2.17 (Conséquence logique)
La formule ψ est une **consequence logique** de la formule φ, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi$ alors $\mathcal{M} \models \psi$.
Plus généralement, ψ est une conséquence logique de l'ensemble de formules $\{\varphi_1 ; \varphi_2 ; \ldots ; \varphi_n\}$, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi_1$ et $\mathcal{M} \models \varphi_2$... et $\mathcal{M} \models \varphi_n$ alors $\mathcal{M} \models \psi$.
On note alors : $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Partant, on peut aussi redéfinir les notions de tautologies et de contradiction en termes de modèles. Une tautologie est vraie dans tout modèle et une contradiction dans aucun.

Définition 2.18 (Tautologie)
Une formule φ est une **tautologie**, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi$.
On note alors : $\models \varphi$

Définition 2.19 (Contradiction)
Une formule φ est une **contradiction**, ou est contradictoire, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ (c'est-à-dire $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$).
On note alors : $\models \neg\varphi$

Définition 2.20 (Equivalence logique)
Deux formules φ et ψ sont **logiquement équivalentes**, ou on pourra dire aussi **sémantiquement équivalentes**, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
On peut également définir la notion à l'aide de la conséquence logique : φ et ψ sont logiquement équivalentes, ssi $\varphi \models \psi$ et $\psi \models \varphi$.

Il y a un théorème qui dit ceci : $\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models [\varphi \to \psi]$. Nous n'allons pas chercher à le démontrer ici, je le mentionne juste à titre d'entraînement à la lecture et à la manipulation des notions et des symboles que nous avons vus jusqu'ici. Ce théorème montre le rapport qui existe entre la conséquence logique et l'implication matérielle : la conséquence logique correspond à une implication *toujours* vraie.

2.5 Conclusion

tbd