λ-calcul typé

Sémantique M1, L. Roussarie (2014)

1 Système sémantique compositionnel : le λ-calcul

1.1 Les prédicats sont des fonctions

Prédicat à 1 place

$$[\![\mathbf{dormir}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = F(w, \mathbf{dormir}) = \begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \{0\ ;1\} \\ \mathrm{x} & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si x dort dans } w \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exemple, avec Alice, Bruno, Charles, Dina $\in \mathcal{A}$:

$$[\![\mathbf{dormir}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \left[\begin{array}{lcl} \textsc{Alice} & \longrightarrow & 1 \\ \textsc{Bruno} & \longrightarrow & 1 \\ \textsc{Charles} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Dina} & \longrightarrow & 1 \\ \ldots & & \end{array}\right]$$

= Alice, Bruno et Dina dorment dans w, et Charles ne dort pas.

Predicats à 2 places

1) Si on fixe un des arguments d'un prédicat à deux places, on obtient sémantiquement un prédicat à une place. Ex : la dénotation du VP *regarde Bruno* change selon le NP sujet qu'on lui associe.

$$[\![\mathbf{regarder}(\_, \mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \left[\begin{array}{lcl} \textsc{Alice} & \longrightarrow & 1 \\ \textsc{Bruno} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Charles} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Dina} & \longrightarrow & 0 \\ \ldots & & \end{array}\right]$$

= la fonction qui dit qui regarde Bruno dans w; ici seule Alice regarde Bruno.

2) On fera la même chose pour **regarder**$(\_, \mathbf{a})$ (fonction « qui regarde Alice? ») :

$$[\![\mathbf{regarder}(\_, \mathbf{a})]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \left[\begin{array}{lcl} \textsc{Alice} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Bruno} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Charles} & \longrightarrow & 1 \\ \textsc{Dina} & \longrightarrow & 1 \\ \ldots & & \end{array}\right]$$

Idem pour **regarder**$(\_, \mathbf{c})$ (« qui regarde Charles? »), pour **regarder**$(\_, \mathbf{d})$ (« qui regarde Dina? ») etc.

$$[\![\mathbf{regarder}(\_, \mathbf{c})]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \left[\begin{array}{lcl} \textsc{Alice} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Bruno} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Charles} & \longrightarrow & 0 \\ \textsc{Dina} & \longrightarrow & 0 \\ \ldots & & \end{array}\right]$$

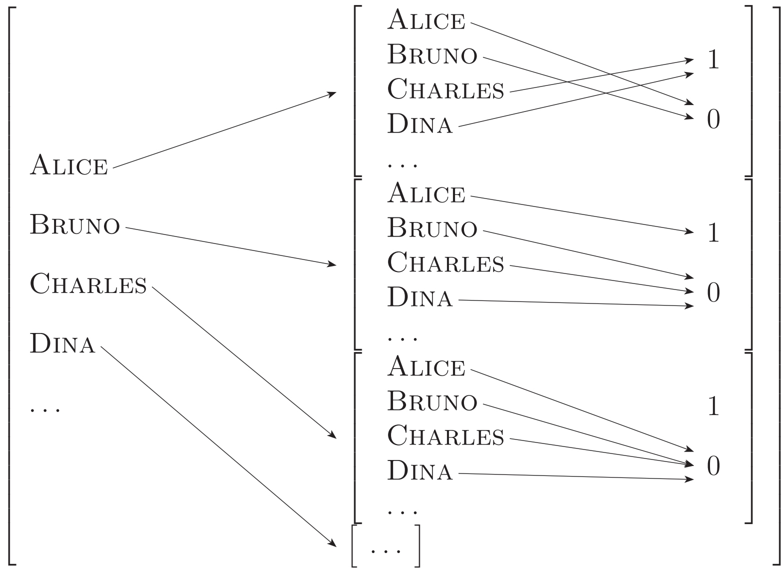
Quand on fait varier le second argument, on obtient une nouvelle fonction.
On a donc une **série** de fonctions.

A chaque valeur possible du second argument, **regarder** (dans w) associe une fonction qui dit qui regarde « cette valeur ». On peut résumer cela dans une grande fonction qui à chaque individu $\textsc{y}$ de $\mathcal{A}$ associe la fonction qui dit qui regarde $\textsc{y}$:

$$[\![\textbf{regarder}(\llcorner\!\lrcorner, \llcorner\!\lrcorner)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \left[\begin{array}{l} \textsc{Alice} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Alice}\text{? »} \\ \textsc{Bruno} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Bruno}\text{? »} \\ \textsc{Charles} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Charles}\text{? »} \\ \textsc{Dina} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Dina}\text{? »} \\ \ldots \end{array}\right]$$

C'est-à-dire :

$[\![\textbf{regarder}(\llcorner\!\lrcorner, \llcorner\!\lrcorner)]\!]^{\mathcal{M},w,g} =$



Conclusion : sémantiquement, un prédicat à deux arguments est d'abord une fonction à un argument qui retourne une fonction à un argument.

$$[\![\textbf{regarder}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = F(w, \textbf{regarder}) = \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \left(\mathcal{A} \longrightarrow \{0\,;1\} \right) \\ \textsc{y} & \longmapsto & \left(\textsc{x} \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } \textsc{x} \text{ regarde } \textsc{y} \text{ dans } w \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \right) \end{array}$$

1.2 λ

λ-abstraction

Si α est une expression bien formée de LO et si v est une variable, alors $\lambda v\, \alpha$ est une expression bien formée de LO. $\lambda v\, \alpha$ est un **λ-terme**.

$\lambda v\, \alpha$ est l'expression α dans laquelle on a fait abstraction de v, c'est-à-dire où « il manque » v.

Sémantiquement $\lambda v\, \alpha$ dénote (dans w) une **fonction** dont l'argument (à saturer) est indiqué par la variable v.

Formellement : $[\![\lambda v\, \alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ = la fonction qui à tout objet $\textsc{d}$ de $\mathcal{A}$ associe $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\textsc{d}/v]}}$, ie la dénotation de α où v prend la valeur $\textsc{d}$.

Application fonctionnelle

Si γ est une expression de LO qui dénote une fonction (donc un λ-terme) et β une expression de LO, pour indiquer que l'on fournit β comme argument à γ, on écrit : $[\gamma(\beta)]$. On dit que l'on **applique** la fonction γ à l'argument β.

β-réduction

$[\lambda v \alpha(\beta)]$ est équivalent à $[\beta/v]\alpha$, où $[\beta/v]\alpha$ est l'expression α où on a remplacé toutes les occurences libres de v par β.

Exemples : $[\lambda y \lambda x\, \mathbf{regarder}(x, y)(\mathbf{b})]$ équivaut à $\lambda x\, \mathbf{regarder}(x, \mathbf{b})$; $\lambda y[\lambda x\, \mathbf{regarder}(x, y)(\mathbf{b})]$ équivaut à $\lambda y\, \mathbf{regarder}(\mathbf{b}, y)$.

2 Théorie des types

2.1 Une inifinité de catégories

Définition 1 (Types)

1. e et t sont des types;
2. si a et b sont des types, alors $\langle a, b\rangle$ est un type;
3. rien d'autre n'est un type.

Par exemple : $\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle$, $\langle \mathrm{t}, \mathrm{t}\rangle$, $\langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \mathrm{t}\rangle$, $\langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, $\langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, $\langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \mathrm{t}\rangle\rangle$ sont des types.

Les types sont des étiquettes de catégories (ou constituants) sémantiques.

— Le type e étiquette les catégories d'expressions qui dénotent des individus, c'est-à-dire les termes;

— le type t étiquette les catégories d'expressions qui dénotent des valeurs de vérité, c'est-à-dire des formules (phrases).

Les types complexes ($\langle a, b\rangle$) peuvent être vus comme des étiquettes de **fonctions** (sémantiques) ou, mieux, comme des *descripteurs de classes de fonctions*.

$\langle a, b\rangle$ est le type des fonctions qui attendent un argument de type a et retourne une valeur de type b.

2.2 LO typé

Rencontre du troisième type

s est le (pseudo-)type des éléments de $\mathcal{W}$[1].

$\mathbf{T}$ = l'ensemble des types de LO.

Définition 2 (T)

$\mathbf{T}$ est le plus petit ensemble tel que :

1. $\mathrm{e} \in \mathbf{T}$ et $\mathrm{t} \in \mathbf{T}$;
2. si $a \in \mathbf{T}$ et $b \in \mathbf{T}$, alors $\langle a, b\rangle \in \mathbf{T}$ et $\langle \mathrm{s}, a\rangle \in \mathbf{T}$.

Exemples : $\langle \mathrm{s}, \langle \mathrm{s}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, $\langle \mathrm{t}, \langle \mathrm{s}, \mathrm{t}\rangle\rangle$ et $\langle\langle \mathrm{s}, \langle\langle \mathrm{s}, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle, \mathrm{t}\rangle\rangle, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, sont des types. Mais s, $\langle \mathrm{e}, \mathrm{s}\rangle$, $\langle \mathrm{s}, \mathrm{s}\rangle$, $\langle \mathrm{s}, \langle \mathrm{t}, \mathrm{s}\rangle\rangle$ ne sont pas des types.

Syntaxe

Notation 1

L'ensemble de toutes les expressions de type a de LO est noté $\mathbb{ME}_a$.

Et on notera $\mathbb{ME}$ l'ensemble de toutes les expressions bien formées de LO (donc $\mathbb{ME}$ est l'union de tous les $\mathbb{ME}_a$: $\mathbb{ME} = \bigcup_{a \in \mathbf{T}} \mathbb{ME}_a$).

1. sauf que dans LO il n'y a pas d'expressions qui dénotent directement un monde possible w.

Ainsi, $\alpha \in \mathrm{ME}_a$ signifie que le type de α est a.

Définition 3 (Vocabulaire)
Le vocabulaire de LO comporte :
— un ensemble de variables $\mathcal{V}ar_a$ et un ensemble de constantes $\mathcal{C}ns_a$ pour chaque type a de $\mathbf{T}$;
— un ensemble de symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\imath$, $\Box$, $\Diamond$, λ, $^\wedge$, $^\vee$;
— les crochets [] et les parenthèses ().

Les éléments de $\mathcal{V}ar_e$ (les variables d'individus) seront notés x, y, z, u, v, w ou $x_1, x_2, \ldots$; les éléments de $\mathcal{C}ns_e$ (les constantes d'individus) seront notés $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ Les élements de $\mathcal{V}ar_{\langle \mathrm{e,t} \rangle}$, et éventuellement ceux de $\mathcal{V}ar_{\langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e,t} \rangle \rangle}$, $\mathcal{V}ar_{\langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e,t} \rangle \rangle \rangle}$, etc., seront notés P, Q, R ou $P_1, P_2, \ldots$ Ce sont les variables de prédicats. Les constantes de prédicats seront notées en suivant la convention de notation adoptée jusqu'ici : **homme**, **dormir**, **aimer**, **donner**...

Définition 4 (Syntaxe)
(Syn.1) si $\alpha \in \mathcal{V}ar_a$ ou $\alpha \in \mathcal{C}ns_a$, alors $\alpha \in \mathrm{ME}_a$;

(Syn.2) si $\alpha \in \mathrm{ME}_{\langle b,a \rangle}$ et $\beta \in \mathrm{ME}_b$, alors $[\alpha(\beta)] \in \mathrm{ME}_a$;

(Syn.3) si α et $\beta \in \mathrm{ME}_a$, alors $[\alpha = \beta] \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$;

(Syn.4) si $\varphi, \psi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$, alors :
a. $\neg\varphi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$,
b. $[\varphi \wedge \psi], [\varphi \vee \psi], [\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\varphi \leftrightarrow \psi] \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$;

(Syn.5) si $\varphi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$, alors $\Box\varphi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$; idem pour tous les autres opérateurs modaux ($\Diamond$,**P**,**F**,**G**,**H**...); de manière générale : si $\varphi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$ et si $*$ est un opérateur modal de LO, alors $*\varphi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$;

(Syn.6) si $\varphi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$ et $v \in \mathcal{V}ar_a$, alors $\forall v\varphi$ et $\exists v\varphi \in \mathrm{ME}_\mathrm{t}$, et $\imath v\varphi \in \mathrm{ME}_a$;

(Syn.7) si $\alpha \in \mathrm{ME}_a$ et $v \in \mathcal{V}ar_b$, alors $\lambda v\alpha \in \mathrm{ME}_{\langle b,a \rangle}$;

(Syn.8) si $\alpha \in \mathrm{ME}_a$, alors $^\wedge\alpha \in \mathrm{ME}_{\langle \mathrm{s},a \rangle}$;

(Syn.9) si $\alpha \in \mathrm{ME}_{\langle \mathrm{s},a \rangle}$, alors $^\vee\alpha \in \mathrm{ME}_a$

Convention de notation 2
Dans LO, on s'autorisera, quand c'est possible et utile, à simplifier l'écriture $[[\alpha(\beta)](\gamma)]$ en $\alpha(\gamma, \beta)$ (ou $[\alpha(\gamma, \beta)]$ si c'est nécessaire), et plus généralement $[[[[\alpha(\beta_1)](\beta_2)] \ldots](\beta_n)]$ en $\alpha(\beta_n, \ldots, \beta_2, \beta_1)$ (ou $[\alpha(\beta_n, \ldots, \beta_2, \beta_1)]$).

Ainsi $[[\mathbf{aimer}(\mathbf{a})](\mathbf{j})]$ peut se simplifier en $\mathbf{aimer}(\mathbf{j}, \mathbf{a})$.

Sémantique

Notation 3
Soit A et B deux ensembles non vides. L'**ensemble de toutes les fonctions** qui vont de A vers B se note B^A.

Nous nous donnons un modèle intensionnel $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{W}, F \rangle$.

Notation 4
L'ensemble des dénotations possibles d'une expression de type a est noté $\mathcal{D}_a$.

Définition 5 (Domaines de dénotation)
1. $\mathcal{D}_e = \mathcal{A}$;

2. $\mathcal{D}_t = \{0\ ;\ 1\}$;
3. $\mathcal{D}_{\langle a,b\rangle} = \mathcal{D}_b^{\mathcal{D}_a}$, pour $a \neq s$;
4. $\mathcal{D}_{\langle \mathrm{s},a\rangle} = \mathcal{D}_a^{\mathcal{W}}$.

Si $\alpha \in \mathcal{C}ns_a$ et $w \in \mathcal{W}$, alors $F(w, \alpha) \in \mathcal{D}_a$. Si $\alpha \in \mathcal{V}ar_a$, alors $g(\alpha) \in \mathcal{D}_a$.

Définition 6 (Sémantique)

(Sem.1) si $\alpha \in \mathcal{C}ns_a$, $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = F(w, \alpha)$;
si $\alpha \in \mathcal{V}ar_a$, $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = g(\alpha)$;

(Sem.2) $[\![\alpha(\beta)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}([\![\beta]\!]^{\mathcal{M},w,g})$;

(Sem.3) $[\![\alpha = \beta]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\beta]\!]^{\mathcal{M},w,g}$;

(Sem.4) $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 0$;
$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ et $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$;
$[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ou $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$;
$[\![\varphi \rightarrow \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 0$ ou $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$;
$[\![\varphi \leftrightarrow \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g}$;

(Sem.5) $[\![\Box\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi pour tout $w' \in \mathcal{W}$ $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w',g} = 1$;
$[\![\Diamond\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi il existe un $w' \in \mathcal{W}$ t.q. $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w',g} = 1$;

(Sem.6) si $v \in \mathcal{V}ar_a$, alors :
$[\![\forall v\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi pour tout $\textsc{d} \in \mathcal{D}_a$, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\textsc{d}/v]}} = 1$;
$[\![\exists v\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi il existe $\textsc{d} \in \mathcal{D}_a$ t.q. $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\textsc{d}/v]}} = 1$;
$[\![\iota v\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \textsc{d}$ ssi $\textsc{d} \in \mathcal{D}_a$ et $\textsc{d}$ est l'*unique* élément de $\mathcal{D}_a$ t.q. $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\textsc{d}/v]}} = 1$;

(Sem.7) si $\alpha \in \mathrm{ME}_a$ et $v \in \mathcal{V}ar_b$, alors $[\![\lambda v\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ est la fonction de $\mathcal{D}_a^{\mathcal{D}_b}$ qui pour tout $\textsc{d} \in \mathcal{D}_b$ donne $\textsc{d} \mapsto [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\textsc{d}/v]}}$;

(Sem.8) si $\alpha \in \mathrm{ME}_a$, alors $[\![{}^\wedge\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ est la fonction de $\mathcal{D}_a^{\mathcal{W}}$ qui pour tout w' de $\mathcal{W}$ donne $w' \mapsto [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w',g}$;

(Sem.9) $[\![{}^\vee\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}(w)$.