λ-calcul typé

Sémantique 4, L. Roussarie (2005)

1 Système sémantique compositionnel : le λ-calcul

1.1 Les prédicats sont des fonctions

Prédicat à 1 place

$$[\![\textbf{dormir}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = F(w, \textbf{dormir}) = \begin{array}{ccl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \\ \textsc{x} & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \textsc{x} \text{ dort dans } w \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exemple, avec $\textsc{Alice}, \textsc{Bruno}, \textsc{Charles}, \textsc{Dina} \in \mathcal{A}$:

$$[\![\textbf{dormir}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \begin{bmatrix} \textsc{Alice} \longrightarrow 1 \\ \textsc{Bruno} \longrightarrow 1 \\ \textsc{Charles} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Dina} \longrightarrow 1 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

= Alice, Bruno et Dina dorment dans w, et Charles ne dort pas.

Predicats à 2 places

1) Si on fixe un des arguments d'un prédicat à deux places, on obtient sémantiquement un prédicat à une place. Ex : la dénotation du VP *regarde Bruno* change selon le NP sujet qu'on lui associe.

$$[\![\textbf{regarder}(\_, \textbf{b})]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \begin{bmatrix} \textsc{Alice} \longrightarrow 1 \\ \textsc{Bruno} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Charles} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Dina} \longrightarrow 0 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

= la fonction qui dit qui regarde Bruno dans w ; ici seule Alice regarde Bruno.

2) On fera la même chose pour **regarder**$(\_, \textbf{a})$ (fonction « qui regarde Alice ? ») :

$$[\![\textbf{regarder}(\_, \textbf{a})]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \begin{bmatrix} \textsc{Alice} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Bruno} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Charles} \longrightarrow 1 \\ \textsc{Dina} \longrightarrow 1 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

Idem pour **regarder**$(\_, \textbf{c})$ (« qui regarde Charles ? »), pour **regarder**$(\_, \textbf{d})$ (« qui regarde Dina ? ») etc.

$$[\![\textbf{regarder}(\_, \textbf{c})]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \begin{bmatrix} \textsc{Alice} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Bruno} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Charles} \longrightarrow 0 \\ \textsc{Dina} \longrightarrow 0 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

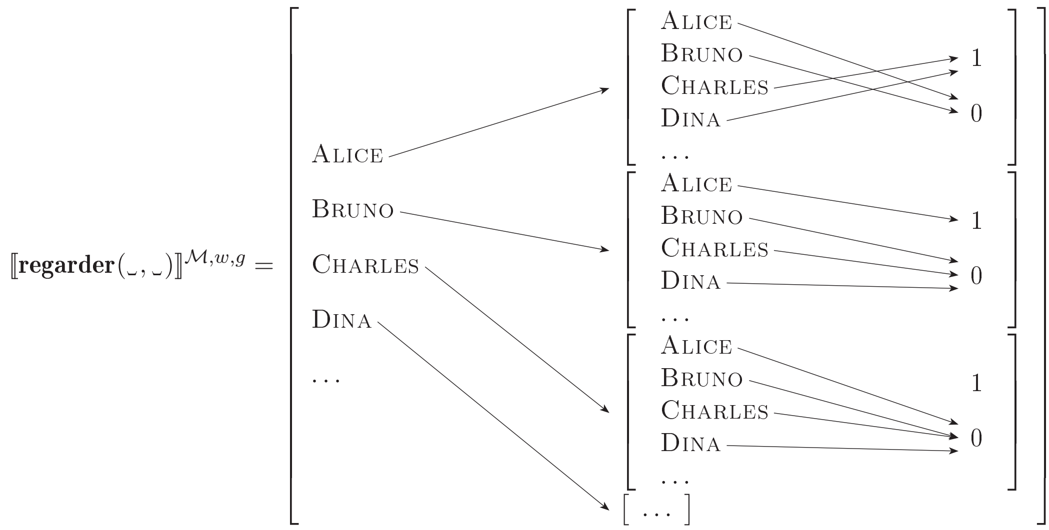
Quand on fait varier le second argument, on obtient une nouvelle fonction.

On a donc une **série** de fonctions.

A chaque valeur possible du second argument, **regarder** (dans w) associe une fonction qui dit qui regarde « cette valeur ». On peut résumer cela dans une grande fonction qui à chaque individu Y de $\mathcal{A}$ associe la fonction qui dit qui regarde Y :

$$[\![\textbf{regarder}(\_, \_)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \begin{bmatrix} \textsc{Alice} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Alice}\text{ ? »} \\ \textsc{Bruno} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Bruno}\text{ ? »} \\ \textsc{Charles} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Charles}\text{ ? »} \\ \textsc{Dina} \longrightarrow \text{« qui regarde } \textsc{Dina}\text{ ? »} \\ \ldots \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire :



Conclusion : sémantiquement, un prédicat à deux arguments est d'abord une fonction à un argument qui retourne une fonction à un argument.

$$[\![\textbf{regarder}]\!]^{\mathcal{M},w,g} = F(w, \textbf{regarder}) = \begin{array}{ccl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \left(\begin{array}{ccl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \{0\,;1\} \end{array} \right) \\ \textsc{y} & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccl} \textsc{x} & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \textsc{x} \text{ regarde } \textsc{y} \text{ dans } w \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array} \right) \end{array}$$

1.2 λ

λ-abstraction

Si α est une expression bien formée de LO et si v est une variable, alors $\lambda v\, \alpha$ est une expression bien formée de LO. $\lambda v\, \alpha$ est un **λ-terme**.

$\lambda v\, \alpha$ est l'expression α dans laquelle on a fait abstraction de v, c'est-à-dire où « il manque » v.

Sémantiquement $\lambda v\, \alpha$ dénote (dans w) une **fonction** dont l'argument (à saturer) est indiqué par la variable v.

Formellement : $[\![\lambda v\, \alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ = la fonction qui à tout objet d de $\mathcal{A}$ associe $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g[\mathsf{d}/v]}$, ie la dénotation de α où v prend la valeur d.

Application fonctionnelle

Si γ est une expression de LO qui dénote une fonction (donc un λ-terme) et β une expression de LO, pour indiquer que l'on fournit β comme argument à γ, on écrit : $[\gamma(\beta)]$. On dit que l'on **applique** la fonction γ à l'argument β.

β-réduction

$[\lambda v\alpha(\beta)]$ est équivalent à $[\beta/v]\alpha$, où $[\beta/v]\alpha$ est l'expression α où on a remplacé toute les occurences libres de v par β.

Exemples : $[\lambda y \lambda x\, \textbf{regarder}(x, y)(\textbf{b})]$ équivaut à $\lambda x\, \textbf{regarder}(x, \textbf{b})$; $\lambda y[\lambda x\, \textbf{regarder}(x, y)(\textbf{b})]$ équivaut à $\lambda y\, \textbf{regarder}(\textbf{b}, y)$.

2 Théorie des types

2.1 Une inifinité de catégories

Définition 1 (Types)

1. e et t sont des types ;
2. si a et b sont des types, alors $\langle a, b\rangle$ est un type ;
3. rien d'autre n'est un type.

Par exemple : $\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle$, $\langle \mathrm{t}, \mathrm{t}\rangle$, $\langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \mathrm{t}\rangle$, $\langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, $\langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, $\langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \langle\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle, \mathrm{t}\rangle\rangle$ sont des types.

Les types sont des étiquettes de catégories (ou constituants) sémantiques.

- Le type e étiquette les catégories d'expressions qui dénotent des individus, c'est-à-dire les termes ;
- le type t étiquette les catégories d'expressions qui dénotent des valeurs de vérité, c'est-à-dire des formules (phrases).

Les types complexes ($\langle a, b\rangle$) peuvent être vus comme des étiquettes de **fonctions** (sémantiques) ou, mieux, comme des *descripteurs de classes de fonctions*.

$\langle a, b\rangle$ est le type des fonctions qui attendent un argument de type a et retourne une valeur de type b.

2.2 LO typé

Rencontre du troisième type

s est le (pseudo-)type des éléments de $\mathcal{W}$[1].

$\mathbf{T}$ = l'ensemble des types de LO.

Définition 2 (T)
$\mathbf{T}$ est le plus petit ensemble tel que :

1. $\mathrm{e} \in \mathbf{T}$ et $\mathrm{t} \in \mathbf{T}$;
2. si $a \in \mathbf{T}$ et $b \in \mathbf{T}$, alors $\langle a, b\rangle \in \mathbf{T}$ et $\langle \mathrm{s}, a\rangle \in \mathbf{T}$.

Exemples : $\langle \mathrm{s}, \langle \mathrm{s}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, $\langle \mathrm{t}, \langle \mathrm{s}, \mathrm{t}\rangle\rangle$ et $\langle\langle \mathrm{s}, \langle\langle \mathrm{s}, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle, \mathrm{t}\rangle\rangle, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle$, sont des types. Mais s, $\langle \mathrm{e}, \mathrm{s}\rangle$, $\langle \mathrm{s}, \mathrm{s}\rangle$, $\langle \mathrm{s}, \langle \mathrm{t}, \mathrm{s}\rangle\rangle$ ne sont pas des types.

Syntaxe

Notation 1
L'ensemble de toutes les expressions de type a de LO est noté $\mathcal{P}_a$.
Et on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les expressions bien formées de LO (donc $\mathcal{P}$ est l'union de tous les $\mathcal{P}_a$: $\mathcal{P} = \bigcup_{a \in \mathbf{T}} \mathcal{P}_a$).

Ainsi, $\alpha \in \mathcal{P}_a$ signifie que le type de α est a.

Définition 3 (Vocabulaire)
Le vocabulaire de LO comporte :

- un ensemble de variables $\mathcal{V}ar_a$ et un ensemble de constantes $\mathcal{C}ns_a$ pour chaque type a de $\mathbf{T}$;
- un ensemble de symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\imath$, $\Box$, $\Diamond$, λ, $^\wedge$, $^\vee$;
- les crochets [] et les parenthèses ().

Les éléments de $\mathcal{V}ar_\mathrm{e}$ (les variables d'individus) seront notés x, y, z, u, v, w ou $x_1, x_2, \ldots$; les éléments de $\mathcal{C}ns_\mathrm{e}$ (les constantes d'individus) seront notés $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ Les élements de $\mathcal{V}ar_{\langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle}$, et éventuellement ceux de $\mathcal{V}ar_{\langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle}$, $\mathcal{V}ar_{\langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e}, \langle \mathrm{e}, \mathrm{t}\rangle\rangle\rangle}$, etc., seront notés P, Q, R ou $P_1, P_2, \ldots$ Ce sont les variables de prédicats. Les constantes de prédicats seront notées en suivant la convention de notation adoptée jusqu'ici : **homme**, **dormir**, **aimer**, **donner**...

Définition 4 (Syntaxe)

(Syn.1) si $\alpha \in \mathcal{V}ar_a$ ou $\alpha \in \mathcal{C}ns_a$, alors $\alpha \in \mathcal{P}_a$;

(Syn.2) si $\alpha \in \mathcal{P}_{\langle b, a\rangle}$ et $\beta \in \mathcal{P}_b$, alors $[\alpha(\beta)] \in \mathcal{P}_a$;

(Syn.3) si α et $\beta \in \mathcal{P}_a$, alors $[\alpha = \beta] \in \mathcal{P}_\mathrm{t}$;

(Syn.4) si $\phi, \psi \in \mathcal{P}_\mathrm{t}$, alors :

a. $\neg\phi \in \mathcal{P}_\mathrm{t}$,

b. $[\phi \wedge \psi], [\phi \vee \psi], [\phi \rightarrow \psi]$ et $[\phi \leftrightarrow \psi] \in \mathcal{P}_\mathrm{t}$;

[1] sauf que dans LO il n'y a pas d'expressions qui dénotent directement un monde possible w.

(Syn.5) si $\phi \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$, alors $\Box\phi \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$; idem pour tous les autres opérateurs modaux ($\Diamond$,**P**,**F**,**G**,**H**...) ; de manière générale : si $\phi \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$ et si $*$ est un opérateur modal de LO, alors $*\phi \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$;

(Syn.6) si $\phi \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$ et $v \in \mathcal{V}ar_a$, alors $\forall v\phi$ et $\exists v\phi \in \mathcal{P}_{\mathrm{t}}$, et $\imath v\phi \in \mathcal{P}_a$;

(Syn.7) si $\alpha \in \mathcal{P}_a$ et $v \in \mathcal{V}ar_b$, alors $\lambda v\alpha \in \mathcal{P}_{\langle b,a\rangle}$;

(Syn.8) si $\alpha \in \mathcal{P}_a$, alors $^\wedge\alpha \in \mathcal{P}_{\langle \mathrm{s},a\rangle}$;

(Syn.9) si $\alpha \in \mathcal{P}_{\langle \mathrm{s},a\rangle}$, alors $^\vee\alpha \in \mathcal{P}_a$

Convention de notation 2
Dans LO, on s'autorisera, quand c'est possible et utile, à simplifier l'écriture $[[\alpha(\beta)](\gamma)]$ en $\alpha(\gamma,\beta)$ (ou $[\alpha(\gamma,\beta)]$ si c'est nécessaire), et plus généralement $[[[[\alpha(\beta_1)](\beta_2)]\ldots](\beta_n)]$ en $\alpha(\beta_n,\ldots,\beta_2,\beta_1)$ (ou $[\alpha(\beta_n,\ldots,\beta_2,\beta_1)]$).

Ainsi $[[\mathbf{aimer}(\mathbf{a})](\mathbf{j})]$ peut se simplifier en $\mathbf{aimer}(\mathbf{j},\mathbf{a})$.

Sémantique

Notation 3
Soit A et B deux ensembles non vides. L'**ensemble de toutes les fonctions** qui vont de A vers B se note B^A.

Nous nous donnons un modèle intensionnel $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{W}, F\rangle$.

Notation 4
L'ensemble des dénotations possibles d'une expression de type a est noté $\mathcal{D}_a$.

Définition 5 (Domaines de dénotation)
1. $\mathcal{D}_e = \mathcal{A}$;
2. $\mathcal{D}_t = \{0 ; 1\}$;
3. $\mathcal{D}_{\langle a,b\rangle} = \mathcal{D}_b^{\mathcal{D}_a}$, pour $a \neq s$;
4. $\mathcal{D}_{\langle \mathrm{s},a\rangle} = \mathcal{D}_a^{\mathcal{W}}$.

Si $\alpha \in \mathcal{C}ns_a$ et $w \in \mathcal{W}$, alors $F(w,\alpha) \in \mathcal{D}_a$. Si $\alpha \in \mathcal{V}ar_a$, alors $g(\alpha) \in \mathcal{D}_a$.

Définition 6 (Sémantique)
(Sem.1) si $\alpha \in \mathcal{C}ns_a$, $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = F(w,\alpha)$;
si $\alpha \in \mathcal{V}ar_a$, $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = g(\alpha)$;

(Sem.2) $[\![\alpha(\beta)]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}([\![\beta]\!]^{\mathcal{M},w,g})$;

(Sem.3) $[\![\alpha = \beta]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\beta]\!]^{\mathcal{M},w,g}$;

(Sem.4) $[\![\neg\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 0$;
$[\![\phi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ et $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$;
$[\![\phi \vee \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ou $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$;
$[\![\phi \rightarrow \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 0$ ou $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$;
$[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$, ssi $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M},w,g}$;

(Sem.5) $[\![\Box\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi pour tout $w' \in \mathcal{W}$ $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w',g} = 1$;
$[\![\Diamond\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi il existe un $w' \in \mathcal{W}$ t.q. $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w',g} = 1$;

(Sem.6) si $v \in \mathcal{V}ar_a$, alors :
$[\![\forall v\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi pour tout $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_a$, $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\mathsf{d}/v]}} = 1$;
$[\![\exists v\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = 1$ ssi il existe $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_a$ t.q. $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\mathsf{d}/v]}} = 1$;
$[\![\imath v\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g} = \mathsf{d}$ ssi $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_a$ et d est l'*unique* élément de $\mathcal{D}_a$ t.q. $[\![\phi]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\mathsf{d}/v]}} = 1$;

(Sem.7) si $\alpha \in \mathcal{P}_a$ et $v \in \mathcal{V}ar_b$, alors $[\![\lambda v\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ est la fonction de $\mathcal{D}_a^{\mathcal{D}_b}$ qui pour tout $\mathsf{d} \in \mathcal{D}_b$ donne $\mathsf{d} \mapsto [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g_{[\mathsf{d}/v]}}$;

(Sem.8) si $\alpha \in \mathcal{P}_a$, alors $[\![^\wedge\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}$ est la fonction de $\mathcal{D}_a^{\mathcal{W}}$ qui pour tout w' de $\mathcal{W}$ donne $w' \mapsto [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w',g}$;

(Sem.9) $[\![^\vee\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g} = [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M},w,g}(w)$.