Logique propositionnelle (LP_0)
Corrigés des exercices

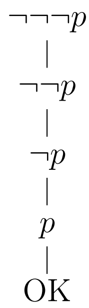
Logique – Licence SDL

Feuille 1

Exercice 1 (EBF)

(À vous de retrouver les règles qui ont été utilisées dans les arbres)

(1) $\neg\neg\neg p$

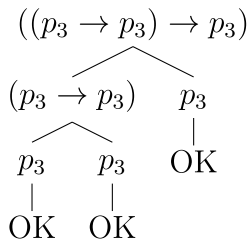


Formule bien formée.

(2) $(p \wedge q \wedge r)$

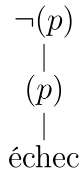
Expression mal formée : 2 connecteurs et seulement 1 paire de parenthèses.

(3) $((p_3 \rightarrow p_3) \rightarrow p_3)$



Formule bien formée.

(4) $\neg(p)$



Expression mal formée : (p) est impossible.

(5) $((p \rightarrow q) \vee (p \leftarrow q))$

- $((p \to q) \vee (p \leftarrow q))$
  - $(p \to q)$
    - p
    - q
  - $(p \leftarrow q)$
    - échec

Expression mal formée : $\leftarrow$ n'est pas un connecteur de LP_0.

(6) $\neg(p \leftrightarrow (q \wedge r))$

- $\neg(p \leftrightarrow (q \wedge r))$
  - $(p \leftrightarrow (q \wedge r))$
    - p
      - OK
    - $(q \wedge r)$
      - q
        - OK
      - r
        - OK

Formule bien formée.

(7) $(\varphi \to \neg(\psi \vee \varphi))$

Expression mal formée : φ et ψ ne sont pas des lettres du vocabulaire (en revanche il s'agit d'un *schéma* de formule bien formée).

(8) $\neg(\neg(p \vee q))$

- $\neg(\neg(p \vee q))$
  - $(\neg(p \vee q))$
    - échec

Expression mal formée : on ne peut pas avoir de parenthèse sur quelque chose de la forme $\neg\varphi$.

(9) $((p_{14} \vee \neg p_8) \to p)$

- $((p_{14} \vee \neg p_8) \to p)$
  - $(p_{14} \vee \neg p_8)$
    - p_{14}
      - OK
    - $\neg p_8$
      - p_8
        - OK
  - p
    - OK

Formule bien formée

(10) $(p \neg\!\to r)$

Expression mal formée : un $\neg$ se met forcément devant quelque chose qui est une formule, jamais devant un connecteur.

(11) $(p \to (q \to r) \to q)$

Expression mal formée : 3 connecteurs et seulement 2 paires de parenthèses.

(12) $(p \to (\neg(p \to q)))$

$$(p \rightarrow (\neg(p \rightarrow q)))$$

$p \qquad (\neg(p \rightarrow q))$

OK $\qquad$ échec

Expression mal formée, pour les même raison qu'en (8).

Exercice 2 (Thème 1)

(1) La musique n'est ni triste ni rythmée.
$(\neg p \wedge \neg q)$ ou $\neg(p \vee q)$

(2) Il ne baille pas, il est même joyeux.
$(\neg t \wedge u)$

(3) Quand il écoute de la musique rythmée, il est joyeux et il danse.
$((r \wedge q) \rightarrow (u \wedge s))$

(4) Il danse, sauf s'il n'est pas joyeux.
$(s \rightarrow t)$ ou $(\neg t \rightarrow \neg s)$ (qui est plus proche du français)

(5) La musique ne le fait pas danser.
$\neg(r \rightarrow s)$ Car dans LP_0 on traduira le sens causatif de *faire* par l'implication (mais ce n'est qu'une approximation) ; $(r \rightarrow s)$ = « s'il écoute de la musique, il danse » $\approx$ « la musique le fait danser ».

(6) S'il danse en baillant, c'est qu'il n'est pas joyeux.
$((s \wedge t) \rightarrow \neg u)$

(7) Il écoute de la musique triste sans bailler.
$((r \wedge p) \wedge \neg t)$
Note importante : on peut aussi proposer $((r \wedge p) \rightarrow \neg t)$, mais attention ça n'a pas le même sens que la première traduction – autrement dit (7) est ambiguë (à cause de la conjugaison au présent). La traduction $((r \wedge p) \rightarrow \neg t)$ signifierait quelque chose comme « il écoute de la musique triste sans jamais bailler », ce qui est une façon de comprendre (7), mais qui est différente de la façon de comprendre $((r \wedge p) \wedge \neg t)$, signifiant plutôt : « il est en train d'écouter de la musique triste et le fait est qu'il ne baille pas ».

(8) Ou il écoute de la musique et il danse, ou il n'est pas joyeux.
$((r \wedge s) \vee \neg u)$ ou bien $((r \wedge s) \vee\!\!\vee \neg u)$ si on préfère y voir une disjonction exclusive.

(9) Il ne suffit pas que la musique soit rythmée pour qu'il danse.
$\neg(q \rightarrow s)$ Ici c'est un peu difficile, mais il faut tout d'abord se souvenir que $\rightarrow$ représente la relation de **condition suffisante** : $(\varphi \rightarrow \psi)$ = il suffit que φ pour ψ. Donc $(q \rightarrow s)$ traduit « il suffit que la musique soit rythmée pour qu'il danse », et on ajoute la négation pour obtenir (9). Cependant, si on regarde la sémantique (ie la table de vérité) de la formule $\neg(q \rightarrow s)$, elle ne semble pas correspondre exactement à ce que l'on comprend de (9).

q	s	$(q \rightarrow s)$	$\neg(q \rightarrow s)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

En particulier, si la musique est rythmée et s'il danse, la formule est fausse. Or dans (9) on comprend que la phrase peut être vraie dans un cas comme celui-là, du moment qu'une *autre* condition, elle nécessaire pour le faire danser, est respectée (cf. « il ne suffit pas que la musique soit rythmée pour qu'il danse, il faut aussi qu'elle soit exotique », et là par exemple il se trouve qu'elle est rythmée et exotique, il danse et donc la phrase est vraie). Mais en fait, quand on comprend (9) de cette manière, c'est en y mettant une certaine valeur *modale* (de généricité) LP_0 ne nous permet pas de rendre compte de cette modalité. La seule traduction valable et possible en LP_0 est bien $\neg(q \to s)$ et elle correspond à une interprétation **constative** (ou épisodique, circonstancielle), du genre : « *regarde : tu vois bien qu'*il ne suffit pas que la musique soit rythmée pour qu'il danse ». Selon cette interprétation, la table de vérité ci-dessus est bien respectée.

Remarque annexe : autant dans (7) on parvenait, dans LP_0, à exprimer (plus ou moins bien) la teneur modale (de généricité) du présent grâce à l'implication, autant on n'y arrive plus dans (9). L'explication est que l'on « modalisait » (7) en remplaçant $\wedge$ par $\to$; et dans (9) on a dès le départ une implication (ie dans la version non modalisée de l'interprétation de la phrase) qu'on ne peut la rendre plus « implicative ». Par modalité (ou « modalisation ») ici il faut entendre l'effet sémantique qui peut être provoqué par des adverbe comme *d'habitude*, *normalement*, *toujours* ou *presque toujours* etc.

(10) Il n'a pas besoin d'écouter de la musique pour danser.

$\neg(s \to r)$ En se souvenant que « avoir besoin de » exprime une condition nécessaire, c'est-à-dire l'implication « inversée » : $(s \to r)$ = il est nécessaire qu'il écoute de la musique pour qu'il danse = il a besoin d'écouter de la musique pour danser. Les remarques précédentes (9) s'appliquent aussi pour cette phrase.

Exercice 3 (Thème 2)

(1) Personne n'a ri, ou même souri.

clé : p : « quelqu'un a ri » ; q : « quelqu'un a souri »

$\neg(p \vee q)$ ou $(\neg p \wedge \neg q)$

(2) Georges ne viendra que si Albert et Lucienne ne viennent pas.

clé : p : « Georges vient » ; q : « Albert vient » ; r : « Lucienne vient »

$(p \to (\neg q \wedge \neg r))$

(3) Continue comme ça, et tu vas t'en prendre une.

clé : p : « tu continues comme ça » ; q : « tu t'en prends une »

$(p \to q)$

(4) Pour jouer au *barbu*, il faut un jeu de 54 cartes.

clé : p : « on joue au *barbu* » ; q : « on a un jeu de 54 cartes »

$(p \to q)$ Ici il faut utiliser une astuce pour pallier à la pauvreté du langage de la logique propositionnelle. En effet, il faut être sûr que la ou les personnes qui jouent au barbu sont bien celles aussi qui ont un jeu de 54 cartes. Pour ce faire on utilise le pronom *on* (ou *nous* ou un autre déictique) dans les clés. Voir aussi la phrase (14). Cet exemple annonce dores et déjà l'intérêt de passer à un langage plus élaboré, celui de la logique des prédicats.

(5) Fred va au boulot en voiture, ou en RER et en bus.
clé : p : « Fred va au boulot en voiture » ; q : « Fred va au boulot en RER » ; r : « Fred va au boulot en bus »
$(p \vee (q \wedge r))$

(6) Une hirondelle ne fait pas le printemps.
clé : p : « il y a une hirondelle » ; q : « c'est le printemps »
$\neg(p \to q)$

(7) S'il boit du vin, il pleure, ou au contraire il est heureux et il chante.
clé : p : « il boit du vin » ; q : « il pleure » ; r : « il est heureux » ; s : « il chante »
$(p \to (q \vee (r \wedge s)))$

(8) Vous n'êtes pas sans savoir que votre billet doit être composté.
clé : p : « vous savez que votre billet doit être composté »
$\neg\neg p$

(9) Qu'il pleuve ou non, le barbecue sera une réussite.
clé : p : « il pleut » ; q : « le barbecue est une réussite »
$((p \vee \neg p) \to q)$

(10) Il n'y a pas plus d'éléphants roses que de beurre en broche.
clé : p : « il y a (existe) des éléphants roses » ; q : « il y a du beurre en broche »
$(p \leftrightarrow q)$ ou $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$

(11) Le jour où on fera valser les abrutis, tu ne seras pas dans l'orchestre.
clé : p : « on fait valser les abrutis » ; q : « tu es dans l'orchestre »
$(p \to \neg q)$

(12) S'il n'aime pas les gorilles, alors s'il rencontre King-Kong, il aura la peur de sa vie.
clé : p : « il aime les gorilles » ; q : « il rencontre King-Kong » ; r : « il a la peur de sa vie »
$(\neg p \to (q \to r))$

(13) Il n'y a pas de fumée sans feu.
clé : p : « il y a de la fumée » ; q : « il y a du feu »
$(p \to q)$ ou $(\neg q \to \neg p)$ ou encore $\neg(p \wedge \neg q)$ (qui est finalement la traduction la plus proche du français).

(14) Qui vole un œuf vole un œuf.
clé : p : « tu voles un œuf »
$(p \to p)$

(15) Si tu ne m'aides pas quand j'en ai besoin, je ne t'aiderai pas quand tu en auras besoin.
clé : p : « tu m'aides » ; q : « j'ai besoin d'aide » ; r : « je t'aide » ; s : « tu as besoin d'aide »
$((q \to \neg p) \to (s \to \neg r))$

(16) Pas de bras, pas de chocolat.
clé : p : « tu as des bras » ; q : « tu as du chocolat » ou « je te donne/t'achète du chocolat »
$(\neg p \to \neg q)$ ou (plus précis) $((\neg p \to \neg q) \wedge \neg p)$

Exercice 4 (Version)

(1) $((\neg u \vee t) \rightarrow \neg s)$ S'il n'est pas joyeux ou s'il baille, il ne danse(ra) pas.

(2) $(r \wedge \neg q)$ Il écoute de la musique qui n'est pas rythmée.

(3) $\neg(p \rightarrow \neg q)$ Il existe de la musique à la fois triste et ryhtmée. La musique triste peut être rythmée (c'est bien le sens de : il est faux que si la musique est triste elle n'est pas rythmée).

(4) $(s \leftrightarrow u)$ Quand il danse, il est joyeux et réciproquement. Il danse si et seulement s'il est joyeux.

(5) $((r \vee s) \wedge \neg(r \wedge s))$ Soit il écoute de la musique, soit il danse, mais pas les deux (en même temps).

(6) $(r \rightarrow p)$ Il n'écoute que de la musique triste.

(7) $\neg\neg t$ Il baille. On ne peut (vraiment) pas dire qu'il ne baille pas.

(8) $(s \rightarrow s)$ S'il danse, il danse. Quand il danse, il danse.

Ici on se doute bien que les traductions françaises en disent beaucoup plus que la formule logique. Par exemple : s'il danse, alors il ne fait que cela, ou quand il danse, il danse vraiment à fond ! Mais ces effets de sens ne sont pas captés (du moins directement) par la logique, et ce à juste titre. En effet, les sous-entendus des traductions françaises relèvent des implicatures, qui sont des contributions d'ordre plutôt pragmatique.

NB : la formule ne pourrait être simplifiée en « il danse » (car cette phrase peut être fausse, alors que la formule $(s \rightarrow s)$ est toujours vraie...).

Feuille 2

Exercice 1

(1)

p	q	$\neg p$	$(q \wedge p)$	$(\neg p \rightarrow (q \wedge p))$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

(2)

p	q	r	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \vee r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

(3)

p	q	$(q \wedge p)$	$(p \leftrightarrow (q \wedge p))$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1

(4)

p	q	$\neg q$	$(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0

(5)

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$((p \to q) \to (q \to p))$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

(6)

p	q	r	$\neg q$	$(p \vee \neg q)$	$((p \vee \neg q) \to r)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Exercice 2 (Valuations)

Commençons par synthétiser les données dans des tableaux, ce qui permettra d'y voir plus clair.

Formules	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
$(p \vee q)$	1	0	1	1	0	1	1
$(q \wedge (q \to p))$	0	0	0	0	0	0	0
$(q \leftrightarrow r)$	1	1	0	1	0	1	1
$(p \to r)$	0	1	1	1	1	1	1
$(r \to p)$	1	1	1	0	0	0	0

Phrases	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
C. ferme les yeux	1	0	1	0	1	0	0
C. ferme un œil	0	0	0	1	0	1	1
C. tire la langue	1	0	1	0	0	0	0
On voit les mains	1	0	1	0	1	0	0
On voit les dents	0	0	1	1	1	1	1

Maintenant, regardons $(p \vee q)$. Cette formule est fausse dans les valuations où p et q sont fausses toutes les deux. On doit donc chercher dans les colonnes V_2 et V_5 du second tableau deux propositions fausses. V_2 ne nous aide pas, mais grâce à V_5, on sait déjà que p et q sont à choisir dans « Calvin ferme un seul œil » et « Calvin tire la langue ».

Prenons ensuite $(p \to r)$ qui est fausse dans V_1. Cela veut donc dire que $V_1(p) = 1$ et $V_1(r) = 0$ (seul cas de figure possible). Avec ce qu'on sait déjà sur p, on trouve que $\boldsymbol{p} \approx$ **« Calvin tire la langue »**. Quand à r, c'est soit « Calvin ferme un seul œil », soit « On voit les dents de Calvin ». Mais r était « Calvin ferme un seul œil », alors on aurait $V_3(p \to r) = 0$ (cf. second tableau). Or ce n'est pas le cas (cf. premier tableau). Par conséquent, on a obligatoirement $\boldsymbol{r} \approx$ **« On voit les dents de Calvin »**.

Pour l'instant, on ne sait pas encore si q correspond à « Calvin ferme un seul œil » ou à « Calvin tire la langue » (par précaution on n'exclue pas la possibilité que p et

q ait la même clé). Mais on sait que $V_1(q \leftrightarrow r) = 1$, donc que $V_1(q) = V_1(r)$. Comme $V_1(r) = 0$, et avec ce qu'on sait déjà sur q, on en conclut que $\boldsymbol{q} \approx$ **« Calvin ferme un seul œil »**.

Ensuite, on sait que d'abord $(r \to (p \vee q))$ ne peut être fausse que dans les valuations où r est vraie (car seule $(1 \to 0)$ est fausse), ce qui nous permet d'exclure V_1 et V_2. Parmi les valuations qui restent, celles qui rendent fausse la formule sont celles où p et q sont fausses toutes les deux ; c'est-à-dire en fait une seule valuation : $\boldsymbol{V_5}$.

Enfin pour trouver les valuations identiques relativement à p, q et r, il suffit de ne regarder que les 2ème, 3ème et 5ème lignes du second tableau ci-dessus, et de repérer les colonnes identiques.

	Phrases	V_1	V_2	V_3	$\boldsymbol{V_4}$	V_5	$\boldsymbol{V_6}$	$\boldsymbol{V_7}$
q :	C. ferme un œil	0	0	0	1	0	1	1
p :	C. tire la langue	1	0	1	0	0	0	0
r :	On voit les dents	0	0	1	1	1	1	1

Exercice 3

Les 16 connecteurs binaires :

φ	ψ	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \vee \neg\psi)$	$(\varphi \vee \varphi)$	$(\neg\varphi \vee \psi)$	$(\psi \vee \psi)$	$\neg(\varphi \vee \psi) \vee \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\psi \vee \psi)$	$\neg(\neg\varphi \vee \psi)$	$\neg(\varphi \vee \varphi)$	$\neg(\varphi \vee \neg\psi)$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
		$\mathcal{V}$	$\vee$	$\leftarrow$	φ	$\rightarrow$	ψ	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\mid$	$\veebar$	$\neg\psi$	$\nrightarrow$	$\neg\varphi$	$\nleftarrow$	$\downarrow$	$\mathcal{F}$

Exercice 4

La négation de φ s'exprime simplement par $\varphi \downarrow \varphi$. La preuve se trouve dans la table de vérité de $*_{15}$ $(= \downarrow)$ en ne regardant que les première et dernière lignes.

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$
1	**1**	**0**
1	0	0
0	1	0
0	**0**	**1**

Quant à la disjonction, elle s'exprime par $(\varphi \downarrow \psi) \downarrow (\varphi \downarrow \psi)$. C'est facile à deviner, car $\downarrow$ est la négation de $\vee$, donc la négation de $\downarrow$, c'est à coup sûr $\vee$. Preuve :

φ	ψ	$\varphi \downarrow \psi$	$(\varphi \downarrow \psi) \downarrow (\varphi \downarrow \psi)$
1	1	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

Pour info, la conjonction s'exprime par : $(\varphi \downarrow \varphi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)$, et l'implication par $((\varphi \downarrow \varphi) \downarrow \psi) \downarrow ((\varphi \downarrow \varphi) \downarrow \psi)$.

Exercice 5

On a vu que l'implication $\varphi \to \psi$ peut se réécrire $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$. Or la barre de Sheffer est la négation de la conjonction, ce qui nous permet de réécrire en $\varphi \mid \neg\psi$. Reste à présent à exprimer la négation avec $\mid$. C'est comme pour la flèche de Pierce : $\neg\psi$ se réécrit en $\psi \mid \psi$ (preuve similaire à celle de l'exercice 4). Donc $\varphi \to \psi$ se réécrit en $\varphi \mid (\psi \mid \psi)$.

NB : du même coup, on vient de montrer que $\mid$ est fonctionnellement complet (car $\{\neg, \to\}$ l'est aussi).

Exercice 6

On dresse les tables de vérité pour chacune des formules.

(a)

φ	$\varphi \to \varphi$
1	1
0	1

(b)

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

(c)

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

(d)

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

(e)

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$
1	0	1
0	1	1

(f) Ici, comme la formule est assez longue, pour éviter d'obtenir une table trop large, nous allons utiliser une variante de présentation plus compacte des tables de vérité. Toutes les valeurs calculées seront placées sous la formule à évaluer, chaque valeur intermédiaire se trouvant alignée soit sous une variable de formule, soit sous le connecteur principale d'une sous-formule. Ainsi les valeurs de vérité globales de la formule se trouvent sous son connecteur principal (colonne en gras ci-dessous).

φ	ψ	χ	$(\varphi$	$\to$	$(\psi$	$\to$	$\chi))$	$\to$	$((\varphi$	$\to$	$\psi)$	$\to$	$(\varphi$	$\to$	$\chi))$
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	0	**1**	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	**1**	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	**1**	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	**1**	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	**1**	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	**1**	0	1	0	1	0	1	0
			1	3	1	2	1	**4**	1	2	1	3	1	2	1

Exercice 7

Réduction de formules.

(a) $\varphi \wedge \varphi$ se réduit en φ, car $1 \wedge 1$ vaut 1, et $0 \wedge 0$ vaut 0 (cf. table de $\wedge$).

(b) $\varphi \wedge \neg\varphi$ se réduit en 0, car c'est une contradiction classique (vue en cours).

(c) $\varphi \vee \varphi$ se réduit en φ, car $1 \vee 1$ vaut 1, et $0 \vee 0$ vaut 0 (cf. table de $\vee$).

(d) $\varphi \vee \neg\varphi$ se réduit en 1 : c'est la loi du tiers exclu (tautologie).

(e) $\varphi \to \varphi$ se réduit en 1 : c'est une tautologie classique vue en cours ($1 \to 1$ et $0 \to 0$ valent 1).

(f) $\varphi \to \neg\varphi$ se réduit en $\neg\varphi$, car $1 \to 0$ vaut 0 et $0 \to 1$ vaut 1 (cf. table de $\to$).

(g) $\neg\varphi \to \varphi$ se réduit en φ, car $0 \to 1$ vaut 1 et $1 \to 0$ vaut 0 (cf. table de $\to$).

(h) $\varphi \leftrightarrow \varphi$ se réduit en 1, car l'équivalence matérielle correspond à l'égalité des valeurs de vérité de ses membres.

(i) $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$ se réduit en 0, car la formule équivaut logiquement à la négation de la précédente.

Exercice 8

Le plus rapide est de calculer les tables de vérités réduites. De plus, comme on sait déjà qu'aucune des formules n'est contingente (ie qu'elles ont chacunes une valeur constante, 1 ou 0), ont peut se permettre de ne faire que la moitié des calculs : dès qu'on trouve *une* valeur de vérité pour une formule, on sait que c'est celle qu'on obtiendra dans tous les cas.

(a)
$$(((p \wedge q) \wedge r) \rightarrow (p \vee q))$$
Si p est vraie :
$$(((1 \wedge q) \wedge r) \rightarrow (1 \vee q))$$
$$((q \wedge r) \underline{\rightarrow 1})$$
$$1$$

Comme la formule n'est pas contingente, c'est une **tautologie**.

(b)
$$(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \wedge \neg p)$$
Si p est vraie :
$$(((1 \rightarrow q) \rightarrow 1) \underline{\wedge 0})$$
$$0$$

La formule est une **contradiction**.

(c)
$$(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q))$$
Si p est vraie :
$$(\neg(\underline{1 \rightarrow} q) \rightarrow (\underline{1 \wedge} \neg q))$$
$$(\neg q \rightarrow \neg q)$$
$$1$$
(car c'est de la forme $(\varphi \rightarrow \varphi)$)

La formule est une **tautologie**.

(d)
$$(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q)$$
Si p est vraie :
$$(((\underline{1 \rightarrow} q) \underline{\wedge 1}) \rightarrow q)$$
$$(q \rightarrow q)$$
$$1$$

La formule est une **tautologie**.

Exercice 9

Deux formules sont logiquement équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérité. Calculons donc les tables de vérité des formules, et voyons ce que l'on trouve.

(a) $(p \vee (q \wedge p))$

p	q	$(q \wedge p)$	$(p \vee (q \wedge p))$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Dans la dernière colonne, on trouve les valeurs de p ; donc $(p \vee (q \wedge p))$ et $\boldsymbol{p}$ sont logiquement équivalentes.

(b) $((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q))$

p	q	$(p \land q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \land \neg q)$	$((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q))$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1

On reconnaît les valeurs de l'équivalence matérielle dans la dernière colonne ; donc $((p \land q) \lor (\neg p \land \neg q))$ est logiquement équivalente à $\boldsymbol{(p \leftrightarrow q)}$.

NB : on aurait pu s'en douter dès le départ, car la formule nous dit que soit p et q sont vraies ensembles $(p \land q)$, soit elles sont fausses ensembles $(\neg p \land \neg q)$, ce qui est la sémantique de l'équivalence matérielle.

(c) $((p \to q) \to \neg p)$

p	q	$(p \to q)$	$\neg p$	$((p \to q) \to \neg p)$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

On reconnaît la négation de la conjonction $(p \land q)$ dans la dernière colonne ; donc $((p \to q) \to \neg p)$ est logiquement équivalente à $\boldsymbol{\neg(p \land q)}$. C'est aussi la barre de Sheffer $(p \mid q)$. Les formules $(p \to \neg q)$, $(q \to \neg p)$, $(\neg p \lor \neg q)$ sont également des réponses correctes.

(d) $((p \to q) \leftrightarrow (q \to p))$

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$((p \to q) \to \neg p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Comme en 2., on retrouve l'équivallence matérielle ; donc $((p \to q) \leftrightarrow (q \to p))$ est logiquement équivalente à $\boldsymbol{(p \leftrightarrow q)}$.

Exercice 10

On calcul les tables de vérité de chaque formule. Utilisons la méthode des tables de vérité réduites.

(a) $((\varphi \land \psi) \to \chi)$ l.eq. à $(\varphi \to (\psi \to \chi))$

$((\varphi \land \psi) \to \chi)$

(i) Hyp $\chi = 1$

$((\varphi \land \psi) \to 1)$ comme c'est de la forme $(\varphi \to 1)$ cela se réduit en :

1

(ii) Hyp $\chi = 0$

$((\varphi \land \psi) \to 0)$ on sait que $(\varphi \to 0)$ se réduit en $\neg\varphi$:

$\neg(\varphi \land \psi)$

On peut s'arrêter là.

$(\varphi \to (\psi \to \chi))$ Suivons les mêmes hypothèses que précédemment :

(i) Hyp $\chi = 1$
$(\varphi \to (\psi \to 1))$ $(\psi \to 1)$ se réduite en 1 :
$(\varphi \to 1)$ idem :
1

(ii) Hyp $\chi = 0$
$(\varphi \to (\psi \to 0))$ $(\psi \to 0)$ se réduit en $\neg\psi$:
$(\varphi \to \neg\psi)$ or on sait que $(p \to q)$ équivaut à $(\neg p \lor q)$, donc :
$(\neg\varphi \lor \neg\psi)$ par loi de Morgan, c'est équivalent à :
$\neg(\varphi \land \psi)$

Pour chaque hypothèse sur la valeur de χ on trouve le même résultat pour les deux formules : 1 quand χ est vraie, et $\neg(\varphi\land\psi)$ quand χ est fausse. Donc les deux formules ont la même table de vérité ; elles sont bien logiquement équivalentes.

(b) $(\varphi \to (\psi \land \chi))$ l.eq. à $((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \chi))$
$(\varphi \to (\psi \land \chi))$

(i) Hyp $\varphi = 1$
$(1 \to (\psi \land \chi))$ or $(1 \to \varphi)$ se réduit en φ, donc :
$(\psi \land \chi)$

(ii) Hyp $\varphi = 0$
$(0 \to (\psi \land \chi))$ qui se réduit en 1 :
1

$((\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \chi))$

(i) Hyp $\varphi = 1$
$((1 \to \psi) \land (1 \to \chi))$ comme $(1 \to \varphi)$ se réduit en φ, on obtient :
$(\psi \land \chi)$

(ii) Hyp $\varphi = 0$
$((0 \to \psi) \land (0 \to \chi))$ qui se réduit en :
$(1 \land 1)$
1

Là encore pour chaque hypothèse, on trouve le même résultat, donc les deux formules sont logiquement équivalentes.

(c) $((\varphi \lor \psi) \to \chi)$ l.eq. à $((\varphi \to \chi) \land (\psi \to \chi))$
$((\varphi \lor \psi) \to \chi)$

(i) Hyp $\chi = 1$
$((\varphi \lor \psi) \to 1)$ qui se réduit immédiatement en :
1

(ii) Hyp $\chi = 0$
$((\varphi \lor \psi) \to 0)$ qui se réduit en :
$\neg(\varphi \lor \psi)$

$((\varphi \to \chi) \land (\psi \to \chi))$

(i) Hyp $\chi = 1$
$((\varphi \to 1) \wedge (\psi \to 1))$ qui se réduit en :
$(1 \wedge 1)$ et :
1

(i) Hyp $\chi = 0$
$((\varphi \to 0) \wedge (\psi \to 0))$ qui se réduit en :
$(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ par loi de Morgan, c'est équivalent à :
$\neg(\varphi \vee \psi)$

(d) $(\varphi \to (\psi \vee \chi))$ l.eq. à $((\varphi \to \psi) \vee \chi)$ l.eq. à $(\neg(\varphi \to \psi) \to \chi)$
$(\varphi \to (\psi \vee \chi))$

(i) Hyp $\varphi = 1$
$(1 \to (\psi \vee \chi))$ qui se réduit en :
$(\psi \vee \chi)$

(ii) Hyp $\varphi = 0$
$(0 \to (\psi \vee \chi))$ qui se réduit en :
1

$((\varphi \to \psi) \vee \chi)$

(i) Hyp $\varphi = 1$
$((1 \to \psi) \vee \chi)$ qui se réduit en :
$(\psi \vee \chi)$

(ii) Hyp $\varphi = 0$
$((0 \to \psi) \vee \chi)$ qui se réduit en :
$(1 \vee \chi)$ qui se réduit en :
1

$(\neg(\varphi \to \psi) \to \chi)$

(i) Hyp $\varphi = 1$
$(\neg(1 \to \psi) \to \chi)$ qui se réduit en :
$(\neg\psi \to \chi)$ qui est équivalent à :
$(\neg\neg\psi \vee \chi)$ par règle de la double négation :
$(\psi \vee \chi)$

(ii) Hyp $\varphi = 0$
$(\neg(0 \to \psi) \to \chi)$ qui se réduit en :
$(\neg 1 \to \chi)$ c'est-à-dire :
$(0 \to \chi)$ qui se réduit en :
1

On trouve les mêmes valeurs pour chaque hypothèse, les trois formules sont logiquement équivalentes.