Logique des prédicats (LP_1)
Exercices

Logique – Licence SDL

Exercice 1
Pour chacune des formules suivantes, dites :

1. s'il s'agit (globalement) d'une négation, d'une conjonction, d'une disjonction, d'une implication, d'une formule universelle ou d'une formule existentielle [1] ;
2. quelle est la portée de chaque quantificateur ;
3. quelles sont les occurrences de variables libres (s'il y en a).

Pour pimenter l'exercice, les parenthèses des plus extérieures on été omises : ainsi une formule $(\varphi \to \psi)$ est écrite $\varphi \to \psi$.

a. $\exists x(Axy \land Bx)$
b. $\exists x Axy \land Bx$
c. $\exists x \exists y Axy \to Bx$
d. $\exists x(\exists y Axy \to Bx)$
e. $\neg\exists x \exists y Axy \to Bx$
f. $\neg Bx \to (\neg\forall y(\neg Axy \lor Bx) \to Cy)$
g. $\neg\exists x(Axy \lor By)$
h. $\neg\exists x Axx \lor \exists y By$
i. $\forall x \forall y((Axy \land By) \to \exists z Cxz)$
j. $\forall x(\forall y Ayx \to By)$

Exercice 2
On modélise sommairement le système solaire par le modèle suivant. Le domaine pris en compte contient les neuf planètes et le Soleil.

On se donne les constantes suivantes : s_0 : le Soleil, m_1 : Mercure, v : Vénus, t : la Terre, l : la Lune, m_2 Mars, j : Jupiter ; s_1 : Saturne ; u : Uranus ; n : Neptune, p : Pluton. Cet ordre représente la proximité relative par rapport au Soleil (Pluton est la plus éloignée et Mercure la plus proche).

Voici les tailles relatives des planètes :
Lune < Mercure < Mars < Pluton < Vénus < Terre < Neptune < Uranus < Saturne < Jupiter.

– Px : x est une planète (du système solaire) ;
– Tx : x tourne autour de la Terre ;
– Mxy : x est plus petit (ou aussi grand) que y
– Sxy : x est plus proche (ou à égale distance) du Soleil que y

Traduire en LP_1 :

a. Vénus est une planète.
b. Le Soleil n'est pas une planète.

1. Sachant que chaque formule ne peut être que d'un seul de ces types à la fois.

c. Le Soleil tourne autour de la Terre.

d. Certaines planètes sont plus petites que la Terre.

e. Toutes les planètes sont plus petites que Saturne.

f. Rien n'est plus petit que la Lune.

g. Mercure est la planète la plus proche du Soleil.

h. Mars est plus loin du Soleil que Pluton.

i. Si quelque chose est plus éloigné du Soleil que Pluton, alors ce n'est pas une planète.

j. Si le Soleil tourne autours de la Terre, alors il est plus petit que celle-ci.

k. S'il n'y a pas de planète plus grande que la Terre, alors la Terre est plus grande que Jupiter.

l. La Lune est une planète mais certaines choses ne sont pas des planètes.

m. Toutes les planètes ne tournent pas autour de la Terre.

n. Aucune planète n'est plus petite que Mercure.

o. Il n'y a pas de planète qui soit plus grande que la Terre tout en étant plus proche du Soleil qu'elle.

p. Il existe une planète telle que tout objet plus proche du Soleil qu'elle, est plus petit qu'elle.

q. Aucune planète n'est à la fois plus petite qu'Uranus et plus éloignée du Soleil qu'elle.

r. Si toutes les planètes tournent autour de la Terre, alors Neptune aussi.

Dites si ces prases sont vraies dans le modèle donné (en justifiant).

Exercice 3

Traduire en LP_1 les phrases ci-dessous en utilisant les cinq prédicats suivants :

- Mxy est vrai ssi x mange y ;
- Hx est vrai ssi x est un herbivore ;
- Vx est vrai ssi x est un (type de) végétal ;
- Bx est vrai ssi x est un bambou ;
- Px est vrai ssi x est un panda.

a. Les herbivores mangent des végétaux.

b. Les herbivores ne mangent que des végétaux.

c. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.

d. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.

e. Certains herbivores ne mangent pas de bambou.

f. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.

Comment traduiriez-vous en français la formule suivante ?

g. $\forall x(\forall y(Mxy \to By) \to Px)$

Exercice 1 Nous encadrons chaque quantificateur et sa portée. Les variables libres sont notées en gras ($\boldsymbol{x}$).

a.	$\boxed{\exists x(Ax\boldsymbol{y} \wedge Bx)}$	formule existentielle
b.	$\boxed{\exists x Ax\boldsymbol{y}} \wedge B\boldsymbol{x}$	conjonction
c.	$\boxed{\exists x \boxed{\exists y Axy}} \rightarrow B\boldsymbol{x}$	implication
d.	$\boxed{\exists x(\boxed{\exists y Axy} \rightarrow Bx)}$	formule existentielle
e.	$\neg\boxed{\exists x \boxed{\exists y Axy}} \rightarrow B\boldsymbol{x}$	implication
f.	$\neg B\boldsymbol{x} \rightarrow (\neg\boxed{\forall y(\neg A\boldsymbol{x}y \vee B\boldsymbol{x})} \rightarrow C\boldsymbol{y})$	implication
g.	$\neg\boxed{\exists x(Ax\boldsymbol{y} \vee B\boldsymbol{y})}$	négation
h.	$\neg\boxed{\exists x Axx} \vee \boxed{\exists y By}$	disjonction
i.	$\boxed{\forall x \boxed{\forall y((Axy \wedge By) \rightarrow \boxed{\exists z Cxz})}}$	formule universelle
j.	$\boxed{\forall x(\boxed{\forall y Ayx} \rightarrow B\boldsymbol{y})}$	formule universelle

Exercice 2

a. Vénus est une planète.
Pv

b. Le Soleil n'est pas une planète.
$\neg Ps_0$

c. Le Soleil tourne autour de la Terre.
Ts_0

d. Certaines planètes sont plus petites que la Terre.
$\exists x(Px \wedge Mxt)$

e. Toutes les planètes sont plus petites que Saturne.
$\forall x(Px \rightarrow Mxs_1)$

f. Rien n'est plus petit que la Lune.
$\neg\exists x Mxl$ ou $\forall x\neg Mxl$

g. Mercure est la planète la plus proche du Soleil.
$\forall x((Px \wedge Sxm_1) \rightarrow x = m_1)$

h. Mars est plus loin du Soleil que Pluton.
Spm_2 ou $\neg Sm_2p$

i. Si quelque chose est plus éloigné du Soleil que Pluton, alors ce n'est pas une planète.
$\forall x(Spx \rightarrow \neg Px)$ (attention donkey-sentence)

j. Si le Soleil tourne autours de la Terre, alors il est plus petit que celle-ci.
$(Ts_0 \rightarrow Ms_0t)$

k. S'il n'y a pas de planète plus grande que la Terre, alors la Terre est plus grande que Jupiter.
$(\neg\exists x(Px \wedge Mtx) \rightarrow Mjt)$ ou $(\forall x(Px \rightarrow Mxt) \rightarrow Mjt)$

l. La Lune est une planète mais certaines choses ne sont pas des planètes.
$Pl \wedge \exists x \neg Px$

m. Toutes les planètes ne tournent pas autour de la Terre.
$\neg\forall x(Px \rightarrow Tx)$

n. Aucune planète n'est plus petite que Mercure.
$\neg\exists x(Px \wedge Mxm_1)$ ou $\forall x(Px \rightarrow \neg Mxm_1)$

o. Il n'y a pas de planète qui soit plus grande que la Terre tout en étant plus proche du Soleil qu'elle.
$\neg\exists x(Px \wedge (Mtx \wedge Sxt))$ ou $\forall x(Px \rightarrow (\neg Mtx \vee \neg Sxt))$

p. Il existe une planète telle que tout objet plus proche du Soleil qu'elle, est plus petit qu'elle.
$\exists x(Px \wedge \forall y(Syx \rightarrow Myx))$

q. Aucune planète n'est à la fois plus petite qu'Uranus et plus éloignée du Soleil qu'elle.
$\neg\exists x(Px \wedge (Mxu \wedge Sux))$ ou $\forall x(Px \rightarrow (Mux \vee Sxu))$

r. Si toutes les planètes tournent autour de la Terre, alors Neptune aussi.
$(\forall x(Px \rightarrow Tx) \rightarrow Tn)$

Exercice 3 Les traductions ne sont pas toujours uniques. Remarque : ici, « les » s'interprète comme une quantification universelle (« tous les »).

a. Les herbivores mangent des végétaux.
$\forall x(Hx \rightarrow \exists y(Vy \wedge Mxy))$
Pour vous aider, vous pouvez commencer en remplaçant les herbivores par un nom propre ; ex : Alfred mange des végétaux. Ce qui donne : $\exists x(Vx \wedge Max)$.
Autre solution possible (logiquement équivalente) :
$\forall x\exists y(Hx \rightarrow (Vy \wedge Mxy))$
Attention, la formule suivante n'est pas une très bonne traduction :
$\exists y\forall x(Hx \rightarrow (Vy \wedge Mxy))$
car ça voudrait dire que tous les herbivores mangent (au moins) le même type de végétal (ce qui est beaucoup restreint que la formule précédente).

b. Les herbivores ne mangent que des végétaux.
$\forall x\forall y((Hx \wedge Mxy) \rightarrow Vy)$
C'es-à-dire, à peu près : « tout ce que peut manger un herbivore est végétal ».

c. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
Ca signifie qu'il n'existe pas d'herbivore qui mange tout type de végétal (on a ainsi isolé la négation, c'est plus facile) :
$\neg\exists x(Hx \wedge \forall y(Vy \rightarrow Mxy))$
ou (équivalent) :
$\neg\exists x\forall y(Hx \wedge (Vy \rightarrow Mxy))$

On peut aussi faire voyager la négation :
$\forall x \neg \forall y (Hx \wedge (Vy \rightarrow Mxy))$ (pour tout herbivore, il ne mange pas tous les végétaux)
$\forall x \exists y \neg (Hx \wedge (Vy \rightarrow Mxy))$ (pour tout herbivore, il y a au moins un végétal qu'il ne mange pas)
$\forall x \exists y (Hx \rightarrow (Vy \wedge \neg Mxy))$

d. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
$\exists x (Vx \wedge \forall y (Hy \rightarrow \neg Myx))$
ou
$\exists x \forall y (Vx \wedge (Hy \rightarrow \neg Myx))$

e. Certains herbivores ne mangent pas de bambou.
$\exists x (Hx \wedge \forall y (By \rightarrow \neg Mxy))$

f. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous.
$\forall x (Px \rightarrow (Hx \wedge \forall y (Mxy \rightarrow By)))$
ou
$\forall x (Px \rightarrow \forall y (Hx \wedge (Mxy \rightarrow By)))$
ou
$\forall x \forall y (Px \rightarrow (Hx \wedge (Mxy \rightarrow By)))$

g. $\forall x (\forall y (Mxy \rightarrow By) \rightarrow Px)$: si tout ce que mange x est du bambou, alors x est un panda (quel que soit x) : si x ne mange que du bambou, alors x est un panda (pour tout x) : il n'y a que les pandas qui ne mangent que du bambou.