# Logique propositionnelle ($LP_0$)
# Exercices (2)

Logique – Licence SDL

**Exercice 1**
Dressez les tables de vérité des formules suivantes :

(1) $(\neg p \rightarrow (q \wedge p))$

(2) $((p \wedge q) \vee r)$

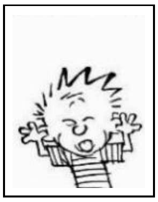
(3) $(p \leftrightarrow (q \wedge p))$

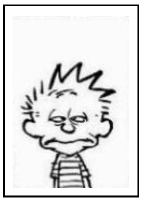
(4) $\neg(p \rightarrow \neg q)$

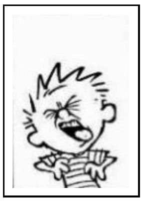
(5) $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$

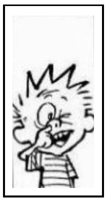
(6) $((p \vee \neg q) \rightarrow r)$

**Exercice 2 (Valuations)**
A chacune des images ci-dessous correspond une valuation $(V_1, \ldots, V_7)$.

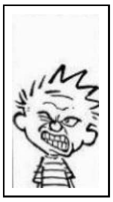

$V_1$

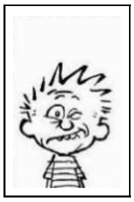

$V_2$


$V_3$


$V_4$


$V_5$


$V_6$


$V_7$

On a les informations suivantes :
- $(p \vee q)$ est fausse pour $V_2$ et $V_5$, et vraie pour les autres valuations ;
- $(q \wedge (q \rightarrow p))$ est fausse pour les 7 valuations ;
- $(q \leftrightarrow r)$ est fausse pour $V_3$ et $V_5$, et vraie pour les autres ;
- $(p \rightarrow r)$ est fausse seulement pour $V_1$ ;
- $(r \rightarrow p)$ est vraie pour $V_1$, $V_2$ et $V_3$, et fausse pour les autres.

Trouvez une clé qui respecte ces informations pour chaque lettre $p$, $q$ et $r$, parmi les propositions suivantes : « Calvin ferme les yeux », « Calvin ferme un seul œil », « Calvin tire la langue », « On voit les deux mains de Clavin » et « On voit les dents de Calvin ».

Ensuite, en fonction de vos clés, dites pour quelles valuations, s'il y en a, la formule $(r \rightarrow (p \vee q))$ est fausse, puis dites quelles valuations sont identiques, relativement aux trois lettres $p$, $q$ et $r$.

**Exercice 3**
Exprimez les 16 connecteurs binaires vérifonctionnels à l'aide uniquement de $\vee$ et $\neg$.

**Exercice 4**
Démontrez que $\{\downarrow\}$ est fonctionnellement complet.
*Astuce* : chercher d'abord à exprimer la négation ; puis la disjonction. Car comme on sait que $\{\neg, \vee\}$ est fonctionnellement complet, alors on sait que l'on pourra tout exprimer avec $\downarrow$.

**Exercice 5**
Exprimez l'implication à l'aide (uniquement) de la barre de Sheffer ($|$).

**Exercice 6**
Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :

(a) $\varphi \to \varphi$
(b) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
(c) $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
(d) $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$ (*ex falso sequitur quodlibet*)
(e) $\varphi \vee \neg\varphi$ (loi du tiers exclu)
(f) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
(g) $(\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$
(h) $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ (loi de Pierce)

**Exercice 7**
Donnez, en justifiant, les règles de réduction pour les formules suivantes :

(a) $\varphi \wedge \varphi$
(b) $\varphi \wedge \neg\varphi$
(c) $\varphi \vee \varphi$
(d) $\varphi \vee \neg\varphi$
(e) $\varphi \to \varphi$
(f) $\varphi \to \neg\varphi$
(g) $\neg\varphi \to \varphi$
(h) $\varphi \leftrightarrow \varphi$
(i) $\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$

**Exercice 8**
Parmi les formules qui suivent, aucune n'est contingente. Démontrez lesquelles sont des tautologies et lesquelles sont des contradictions. Vous essaierez de faire le moins de calcul possible.

(a) $(((p \wedge q) \wedge r) \to (p \vee q))$
(b) $(((p \to q) \to p) \wedge \neg p)$
(c) $(\neg(p \to q) \to (p \wedge \neg q))$
(d) $(((p \to q) \wedge p) \to q)$

**Exercice 9**
Pour chacune des formules suivantes, proposez une formule qui lui est logiquement équivalente (et plus simple). Vous justifierez vos réponses.

(a) $(p \vee (q \wedge p))$
(b) $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$
(c) $((p \to q) \to \neg p)$
(d) $((p \to q) \leftrightarrow (q \to p))$

**Exercice 10**
Démontrez les équivalences logiques suivantes :

(a) $((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$ l.eq. à $(\varphi \to (\psi \to \chi))$
(b) $(\varphi \to (\psi \wedge \chi))$ l.eq. à $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi))$
(c) $((\varphi \vee \psi) \to \chi)$ l.eq. à $((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi))$
(d) $(\varphi \to (\psi \vee \chi))$ l.eq. à $((\varphi \to \psi) \vee \chi)$ l.eq. à $(\neg(\varphi \to \psi) \to \chi)$