Sémantique formelle

Exercice – Portées et variables

Exercice 1
Pour chacune des formules suivantes, dites : *i*) quelle est la portée de chaque quantificateur, *ii*) quelles sont les occurrences de variables libres (s'il y en a), et *iii*) et par quels quantificateurs sont liées les autres variables[1]. NB : les crochets [ ] les plus extérieurs (quand ils existent) ont été supprimés.

1. $\exists x[\textbf{aimer}(x, y) \wedge \textbf{âne}(x)]$
2. $\exists x\,\textbf{aimer}(x, y) \wedge \textbf{âne}(x)$
3. $\exists x \exists y\,\textbf{aimer}(x, y) \rightarrow \textbf{âne}(x)$
4. $\forall x[\exists y\,\textbf{aimer}(x, y) \rightarrow \textbf{âne}(x)]$
5. $\neg\exists x \exists y\,\textbf{aimer}(x, y) \rightarrow \textbf{âne}(x)$
6. $\neg\exists x[\textbf{aimer}(x, y) \vee \textbf{âne}(y)]$
7. $\neg\exists x\,\textbf{aimer}(x, x) \vee \exists y\,\textbf{âne}(y)$
8. $\forall x[\forall y\,\textbf{aimer}(y, x) \rightarrow \textbf{âne}(y)]$
9. $\neg\textbf{âne}(x) \rightarrow [\neg\forall y[\neg\textbf{aimer}(x, y) \vee \textbf{âne}(x)] \rightarrow \textbf{elfe}(y)]$
10. $\forall x \forall y[[\textbf{aimer}(x, y) \wedge \textbf{âne}(y)] \rightarrow \exists z\,\textbf{mari-de}(x, z)]$

1. Par exemple, vous pouvez encadrer les portées avec leur quantificateur, entourer les variables libres et relier par une flèche les variables liées à leur quantificateur.

Corrigé

Exercice 1 Nous encadrons chaque quantificateur et sa portée. Les variables libres sont notées en gras ($\boldsymbol{x}$). Les variables liées sont indiquées par des indices numériques.

1. $\boxed{\exists x_1 [\textbf{aimer}(x_1, \boldsymbol{y}) \wedge \textbf{âne}(x_1)]}$
2. $\boxed{\exists x_1\, \textbf{aimer}(x_1, \boldsymbol{y})} \wedge \textbf{âne}(\boldsymbol{x})$
3. $\boxed{\exists x_1 \boxed{\exists y_2\, \textbf{aimer}(x_1, y_2)}} \rightarrow \textbf{âne}(\boldsymbol{x})$
4. $\boxed{\forall x_1 [\boxed{\exists y_1\, \textbf{aimer}(x_1, y_2)} \rightarrow \textbf{âne}(x_1)]}$
5. $\neg \boxed{\exists x_1 \boxed{\exists y_2\, \textbf{aimer}(x_1, y_2)}} \rightarrow \textbf{âne}(\boldsymbol{x})$
6. $\neg \boxed{\exists x_1 (\textbf{aimer}(x_1, \boldsymbol{y}) \vee \textbf{âne}(\boldsymbol{y}))}$
7. $\neg \boxed{\exists x_1\, \textbf{aimer}(x_1, x_1)} \vee \boxed{\exists y_2\, \textbf{âne}(y_2)}$
8. $\boxed{\forall x_1 [\boxed{\forall y_2\, \textbf{aimer}(y_2, x_1)} \rightarrow \textbf{âne}(\boldsymbol{y})]}$
9. $\neg\textbf{âne}(\boldsymbol{x}) \rightarrow [\neg \boxed{\forall y_1 [\neg\textbf{aimer}(\boldsymbol{x}, y_1) \vee \textbf{âne}(\boldsymbol{x})]} \rightarrow \textbf{elfe}(\boldsymbol{y})]$
10. $\boxed{\forall x_1 \boxed{\forall y_2 [[\textbf{aimer}(x_1, y_2) \wedge \textbf{âne}(y_2)] \rightarrow \boxed{\exists z_3\, \textbf{mari-de}(x_1, z_3)}]}}$