Méthode des contre-exemples (LP_1)
Exercices

Logique – Licence SDL

Exercice 1
Utilisez la méthode des contre-exemples pour montrer si les formes de raisonnement suivantes sont valides ou non :

1. $p \to (q \vee r), \neg(q \wedge r) / \neg p$
2. $(p \to q) \to r, \neg r / \neg(\neg p \vee q)$
3. $/ p \to (q \to p)$
4. $p \wedge \neg(\neg q \wedge \neg r), p \to \neg r / q$
5. $(p \vee r) \to (q \wedge s), \neg s, \neg p \leftrightarrow q / q \vee r$
6. $p \vee r, p \to q, r \leftrightarrow s / q \vee s$
7. $(p \wedge r) \to q, q \to (p \wedge q) / p \leftrightarrow q$

Exercice 2
Les formes de raisonnement suivantes sont-elles valides ou non valides ?

1. $\forall x Bx \to \forall x(Cx \wedge Bx), \neg \exists x \neg Bx / Cb$
2. $\forall x(Ax \vee Bx), \forall x(Bx \vee Cxa) / \forall x(Ax \vee Cxa)$
3. $\forall x \neg(\exists y Dxy \wedge Ax), Dab / Aa \to \exists x \forall y \neg Dxy$
4. $\forall y Bay \to \forall y \neg Cay / \exists x \forall y \neg(Bxy \wedge Cxy)$
5. $\forall x \exists y Bxy / \forall x Bxx$

Exercice 3

1. Aucun étudiant n'est ignorant
Les gens ignorants sont tous superficiel
Aucun étudiant n'est superficiel
2. Quelques rêves sont épouvantables
Aucun agneau n'est épouvantable
Quelques rêves ne sont pas des agneaux

Solutions

Exercice 1

1. $p \to (q \vee r), \neg(q \wedge r) / \neg p$

   Arbre de contre-exemple :

   $\cancel{(p \to (q \vee r)):1}^2$, $\cancel{(\neg(q \wedge r)):1}^4$, $\cancel{(\neg p):0}^1$

   (1) (p):1

   (2) (p):0 $\qquad \cancel{(q \vee r):1}$ ³

   $\perp$

   (3) (q):1 $\qquad (r)$:1

   (4) $\cancel{(q \wedge r):0}$ ⁵ $\qquad (q \wedge r)$:0

   (5) (q):0 $\qquad (r)$:0

   $\perp \qquad$ OK

   La valuation V telle que $V(p) = V(q) = 1$ et $V(r) = 0$ est un **contre-exemple**. Le raisonnement n'est pas donc **pas valide**. La valuation V' est aussi une contre-valuation : $V'(p) = V'(r) = 1$ et $V'(q) = 0$.

2. $(p \to q) \to r, \neg r / \neg(\neg p \vee q)$

   $\cancel{((p \to q) \to r):1}^3$, $\cancel{(\neg r):1}^1$, $\cancel{(\neg(\neg p \vee q)):0}^2$

   (r):0

   $\cancel{(\neg p \vee q):1}^5$

   $\cancel{(p \to q):0}^4 \qquad (r)$:1

   $\qquad\qquad \perp$

   (p):1

   (q):0

   $\cancel{(\neg p):1} \qquad (q)$:1

   $\qquad\qquad \perp$

   (p):0

   $\perp$

   Le raisonnement est donc **valide**.

3. $/p \to (q \to p)$

$$
\begin{array}{c}
\cancel{(p \to (q \to p))}:0 \\
| \\
(p):1 \\
| \\
\cancel{(q \to p)}:0 \\
| \\
(q):1 \\
| \\
(p):0 \\
\perp
\end{array}
$$

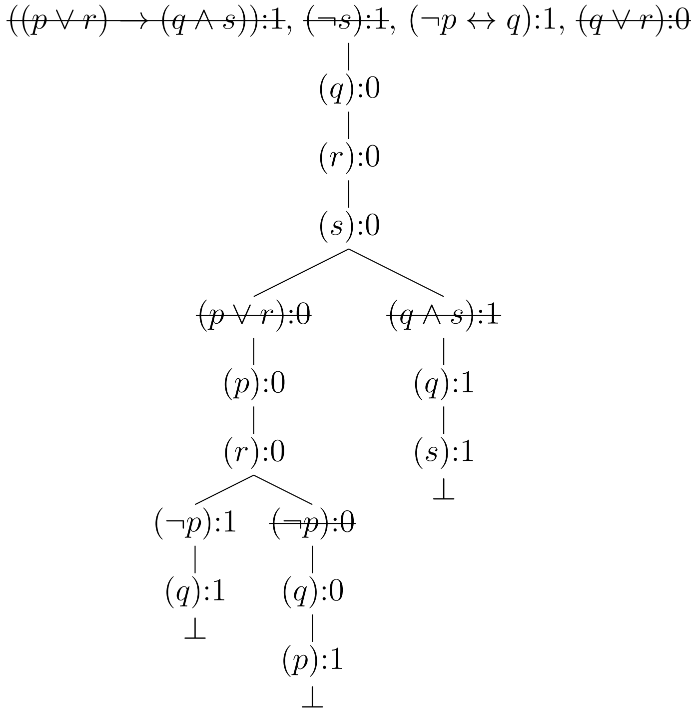
Le raisonnement est **valide**. C'est une tautologie.

4. $p \land \neg(\neg q \land \neg r), p \to \neg r / q$

$$
\begin{array}{c}
\cancel{(p \land \neg(\neg q \land \neg r))}:1,\ \cancel{(p \to \neg r)}:1,\ (q):0 \\
| \\
(p):1 \\
| \\
\cancel{(\neg(\neg q \land \neg r))}:1 \\
| \\
\cancel{(\neg q \land \neg r)}:0 \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \cancel{(\neg q)}:0 \\ | \\ (q):1 \\ \perp \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \cancel{(\neg r)}:0 \\ | \\ (r):1 \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} (p):0 \\ \perp \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{array}{c} \cancel{(\neg r)}:1 \\ | \\ (r):0 \\ \perp \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

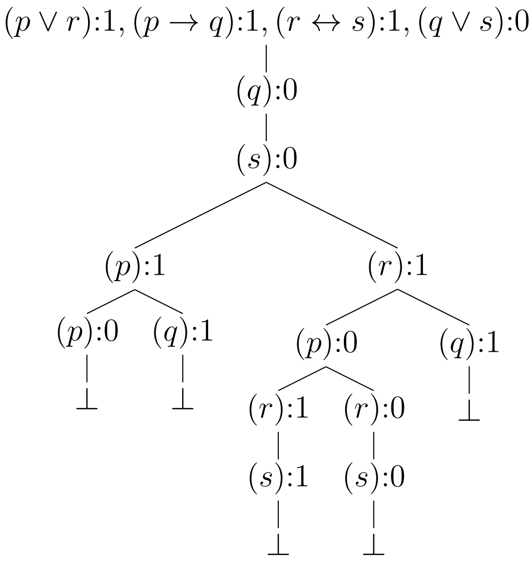
Le raisonnement est donc **valide**.

5. $(p \lor r) \to (q \land s), \neg s, \neg p \leftrightarrow q / q \lor r$



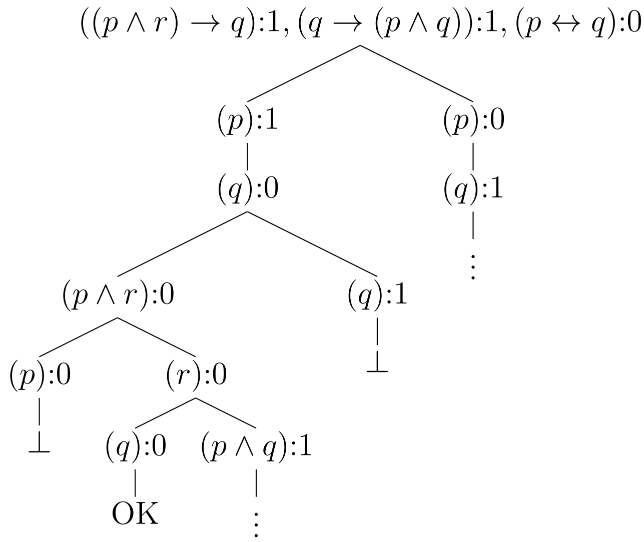
Le raisonnement est donc **valide**.

6. $p \vee r, p \rightarrow q, r \leftrightarrow s / q \vee s$



Le raisonnement est donc **valide**.

7. $(p \wedge r) \rightarrow q, q \rightarrow (p \wedge q) / p \leftrightarrow q$

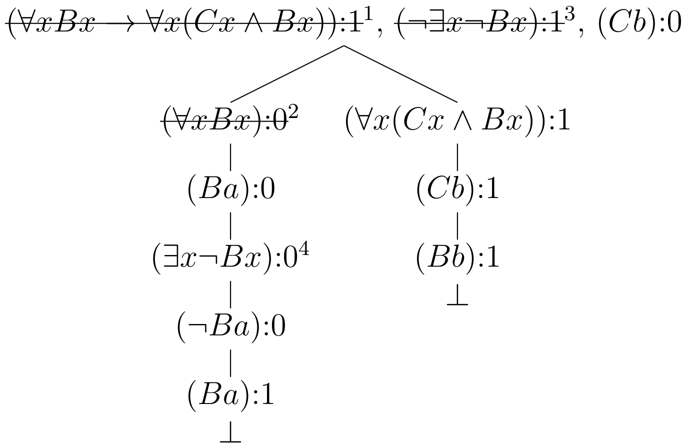


On a au moins la valuation V telle que $V(p) = 1$ et $V(q) = V(r) = 0$ qui est un contre-exemple à ce raisonnement. Il est donc **non valide**.

Exercice 2

On numérote avec un exposant chaque hypothèse de l'arbre pour indiquer l'ordre dans lequel on l'a simplifiée. Cela nous évitera alors d'utiliser les $^\times$: à la place on aura un numéro sur une hypothèse non barrée.

1. $\forall xBx \to \forall x(Cx \wedge Bx), \neg\exists x\neg Bx/Cb$



Le raisonnement est **valide**.

2. $\forall x(Ax \vee Bx), \forall x(Bx \vee Cxa)/\forall x(Ax \vee Cxa)$

$(\forall x(Ax \lor Bx))$:1[3], $(\forall x(Bx \lor Cxa))$:1[5], $\cancel{(\forall x(Ax \lor Cxa)):0}$[1]

$\cancel{(Ab \lor Cba):0}$[2]

(Ab):0

(Cba):0

$\cancel{(Ab \lor Bb):1}$[4]

(Ab):1	(Bb):1
$\perp$	$\cancel{(Bb \lor Cba):1}$[6]
	(Bb):1 — (Cba):1
	OK — $\perp$

Le raisonnement est **non valide**.

Important : comme a est aussi présente, il faut vérifier comment elle se comporte dans ce raisonnement ; et ce n'est pas aléatoire, car on a $(\forall x(Ax \lor Bx))$:1 et $(\forall x(Bx \lor Cxa))$:1 qui sont toujours actifs.

En fait, ici nous avons trouvé un *début* de contre-modèle : à savoir qu'il comporte deux individus nommés a et b. On sait que b vérifie B, qu'il ne vérifie pas A et que b n'est pas en relation C avec a ((Cba) : 0). Mais on ne connaît pas complètement A et B car on ne sait pas si a les vérifie. Il faut donc compléter la construction du contre-exemple de la manière suivante :

$\vdots$

$\cancel{(Aa \lor Ba):1}$ (application de 3)

(Aa):1	(Ba):1
$\cancel{(Ba \lor Caa):1}$	$\cancel{(Ba \lor Caa):1}$ (application de 5)
(Ba):1 — (Caa):1	(Ba):1 — (Caa):1

On voit qu'on ne peut pas avoir, par exemple, Aa sans Ba ou sans Caa.

Par conséquent, un contre-modèle qui fait l'affaire est un modèle qui comporte a et b et tels que a vérifie A et B, b vérifie B mais pas A et b n'est pas en relation C avec a. Exemple : $\mathbf{M} = \langle A, I\rangle$ avec $A = \{$Anne ; Béa$\}$ et $I(a) =$ Anne, $I(b) =$ Béa, $I(A) = \{$Anne$\}$ et $I(B) = \{$Anne ; Béa$\}$ et $I(C) = \varnothing$ (on peut aussi proposer : $I(C) = \{\langle$Anne, Anne$\rangle\}$, entre autres).

3. $\forall x \neg(\exists y Dxy \land Ax), Dab / Aa \to \exists x \forall y \neg Dxy$

$$(\forall x \neg(\exists y Dxy \wedge Ax)){:}1^5,\ (Dab){:}1,\ \cancel{(Aa \to \exists x \forall y \neg Dxy){:}0}^1$$
$$|$$
$$(Aa){:}1$$
$$|$$
$$(\exists x \forall y \neg Dxy){:}0^2$$
$$|$$
$$\cancel{(\forall y \neg Day){:}0}^3$$
$$|$$
$$\cancel{(\neg Dac){:}0}^4$$
$$|$$
$$(Dac){:}1$$
$$|$$
$$\cancel{(\neg(\exists y Day \wedge Aa)){:}1}^6$$
$$|$$
$$\cancel{(\exists y Day \wedge Aa){:}0}^7$$
$$\begin{array}{cc} (\exists y Day){:}0 & (Aa){:}0 \\ | & \bot \\ (Dab){:}0 & \\ \bot & \end{array}$$

Le raisonnement est **valide**.

4. $\forall y Bay \to \forall y \neg Cay / \exists x \forall y \neg(Bxy \wedge Cxy)$

$$(\forall y Bay \to \forall y \neg Cay){:}1^4,\ (\exists x \forall y \neg(Bxy \wedge Cxy)){:}0^1$$
$$|$$
$$\cancel{(\forall y \neg(Bay \wedge Cay)){:}0}^2$$
$$|$$
$$\cancel{(\neg(Bab \wedge Cab)){:}0}^3$$
$$|$$
$$(Bab){:}1$$
$$|$$
$$(Cab){:}1$$
$$\begin{array}{cc} \cancel{(\forall y Bay){:}0}^5 & (\forall y \neg Cay){:}1 \\ | & \vdots \\ (Bac){:}0 & \\ \text{OK} & \end{array}$$

Raisonnement non valide. Le contre-modèle comprend 3 individus nommés a, b et c, tels que a est en relation B avec b et a est aussi en relation C avec b. Par exemple $\mathbf{M} = \langle A, I \rangle$ avec $A = \{\textsc{Alex}\ ;\ \textsc{Bob}\ ;\ \textsc{Carl}\}$ et $I(a) = \textsc{Alex}$, $I(b) = \textsc{Bob}$, $I(c) = \textsc{Carl}$, $I(B) = \{\langle \textsc{Alex}, \textsc{Bob} \rangle\}$ et $I(C) = \{\langle \textsc{Alex}, \textsc{Bob} \rangle\}$.

5. $\forall x \exists y Bxy / \forall x Bxx$

$$
\begin{array}{c}
(\forall x \exists y Bxy){:}1^{2,4},\ \cancel{(\forall x Bxx){:}0}^{1} \\
| \\
(Baa){:}0 \\
| \\
\cancel{(\exists y Bay){:}1}^{3} \\
| \\
(Bab){:}1 \\
\text{OK} \\
\text{avec aussi } (\exists y Bby){:}1
\end{array}
$$

Le raisonnement est **non valide**. Pour que le contre-exemple soit complet il faut aussi une valeur pour Bba et Bbb, à cause de $(\exists y Bby)$:1. N'importe lesquels feront l'affaire. Par exemple, un contre-modèle est : $\mathbf{M} = \langle \mathcal{A}, I \rangle$. $\mathcal{A} = \{\square\ ; O\}$. $I(a) = \square$, $I(b) = O$, $I(B) = \{\langle \square, O \rangle\ ; \langle O, \square \rangle\}$.

Exercice 3

1. Prenons les clés suivantes :
   – $Ex \approx x$ est étudiant ;
   – $Ix \approx x$ est ignorant ;
   – $Sx \approx x$ est superficiel.

   Le raisonnement est alors : $\dfrac{\forall x(Ex \to \neg Ix) \quad \forall x(Ix \to Sx)}{\forall x(Ex \to \neg Sx)}$

   Arbre de contre-exemple en figure 1.

$$
\begin{array}{c}
\forall x(Ex \to \neg Ix){:}1,\ \forall x(Ix \to Sx){:}1,\ \cancel{\forall x(Ex \to \neg Sx){:}0} \\
| \\
\cancel{(Ea \to \neg Sa){:}0} \\
| \\
(Ea){:}1 \\
| \\
\cancel{(\neg Sa){:}0} \\
| \\
(Sa){:}1 \\
| \\
\cancel{(Ea \to \neg Ia){:}1} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} (Ea){:}0 \\ \bot \end{array} &
\begin{array}{c}
\cancel{(\neg Ia){:}1} \\
| \\
(Ia){:}0 \\
| \\
\cancel{(Ia \to Sa){:}1} \\
\swarrow \quad \searrow \\
\begin{array}{cc} (Ia){:}0 & (Sa){:}1 \\ \text{OK} & \text{OK} \end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

FIGURE 1 – Arbre de contre-exemple de 1

On a trouvé un contre-exemple, c'est un modèle M qui contient au moins un individu a (appelons-le Alfred) tel que Alfred est un étudiant non ignorant mais superficiel. En effet on a : $V_M(Ea) = V_M(Sa) = 1$ et $V_M(Ia) = 0$. Le raisonnement n'est donc pas valide.

2. Clés :
   - $Rx \approx x$ est un rêve ;
   - $Ex \approx x$ est épouvantable ;
   - $Ax \approx x$ est un agneau.

   Traduction du raisonnement : $\dfrac{\begin{array}{l}\exists x(Rx \wedge Ex) \\ \forall x(Ax \to \neg Ex)\end{array}}{\exists x(Rx \wedge \neg Ax)}$

   Arbre de contre-exemple (les hypothèses sont traitées dans l'ordre) :

$$\cancel{\exists x(Rx \wedge Ex):1}, \forall x(Ax \to \neg Ex):1, \exists x(Rx \wedge \neg Ax):0$$

$$\cancel{(Ra \wedge Ea):1}$$

$$Ra:1$$

$$Ea:1$$

$$\cancel{(Aa \to \neg Ea):1}$$

$$\begin{array}{cc} (Aa):0 & \cancel{(\neg Ea):1} \\ \cancel{(Ra \wedge \neg Aa):0} & (Ea):0 \\ \begin{array}{cc} (Ra):0 & \cancel{(\neg Aa):0} \\ \bot & (Aa):1 \\ & \bot \end{array} & \bot \end{array}$$

   Il n'y a pas de contre-exemple ; le raisonnement est donc valide.