Exercice 1

Traduisez dans LO la phrase suivante :

(1) Les druides ne possèdent pas tous des livres.

Cette phrase est la négation de « Les druides possèdent tous des livres », qui veut dire la même chose que « Tous les druides possèdent des livres ».

« Tous les druides possèdent des livres » se traduit par :

(2) $\forall x[\mathbf{druide}(x) \rightarrow \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]]$
pour chaque individu x, si x est un druide, alors il existe au moins un livre que x possède

Et (1) se traduit simplement par la négation de cette formule :

(1) $\neg\forall x[\mathbf{druide}(x) \rightarrow \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]]$

Remarque : la phrase (1) peut aussi se paraphraser en « Il y a des druides qui ne possèdent pas de livre » et c'est équivalent au sens décrit ci-dessus. Donc (1) peut aussi se traduire par :

(1) $\exists x[\mathbf{druide}(x) \wedge \neg\exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]]$

ça a le même sens que la formule précédente [1].

Voici quelques formules bien formées, mais qui *ne sont pas* des traductions correctes de (1) :

(3) $\exists x[\mathbf{druide}(x) \wedge \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \neg\mathbf{posséder}(x, y)]]$
il y a un livre qu'un (certain) druide ne possède pas; mais ce druide peut posséder d'autres livres...

(4) $\forall x[\mathbf{druide}(x) \rightarrow \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \neg\mathbf{posséder}(x, y)]]$
pour chaque druide, il y a un livre qu'il ne possède pas; ça serait la traduction de « Aucun druide ne possède tous les livres »

(5) $\forall x[\mathbf{druide}(x) \rightarrow \neg\exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]]$
aucun druide ne possède de livre

(6) $\forall y[\mathbf{livre}(y) \rightarrow \exists x[\mathbf{druide}(x) \wedge \neg\mathbf{posséder}(x, y)]]$
pour chaque livre y, il y a au moins un druide qui ne possède pas y; ce n'est pas le sens de (1); à la rigueur ça pourrait être la traduction de « Aucun livre n'est possédé par l'ensemble des druides »

1. On peut se demander, pour les deux traductions de (1), s'il ne fait pas ajouter l'information que, par ailleurs, il y a des druides qui possèdent des livres. Ce n'est pas absurde, et dans ce cas les traductions complètes seraient, respectivement : $\exists x[\mathbf{druide}(x) \wedge \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]] \wedge \neg\forall x[\mathbf{druide}(x) \rightarrow \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]]$ et $\exists x[\mathbf{druide}(x) \wedge \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]] \wedge \exists x[\mathbf{druide}(x) \wedge \neg\exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]]$. Mais il n'est pas certain que cette information supplémentaire ($\exists x[\mathbf{druide}(x) \wedge \exists y[\mathbf{livre}(y) \wedge \mathbf{posséder}(x, y)]]$) fasse vraiment partie des conditions de vérité de (1). Imaginons un scénario (= un modèle) extrême où *aucun* druide ne possède de livre ; dans ce cas il est difficile de dire que (1) est fausse.