Logique avancée

Examen – 2h

6 janvier 2015

Exercice 1

Soit $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$ avec $\mathcal{W} = \{w_1 \,;\, w_2 \,;\, w_3 \,;\, w_4\}$ et : [8 pts]

— $w_1\ R\ w_2$, $w_1\ R\ w_4$, $w_2\ R\ w_3$, $w_3\ R\ w_1$, $w_3\ R\ w_3$, $w_4\ R\ w_1$, $w_4\ R\ w_3$,

— $V_{w_1}(p) = V_{w_3}(p) = V_{w_1}(q) = V_{w_2}(q) = 1$ (et la valeur est 0 dans les autres cas).

1. Dessinez ce modèle.
2. Dans quels mondes $\Box p$ est vraie ? Dans quels mondes $\Box q$ est vraie ?
3. Calculez :
   (a) $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p))$
   (b) $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\Box p \vee \Box\Diamond p)$
4. Est-ce que la formule suivante est valide dans $\mathcal{M}$?
   (a) $(\Diamond q \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box p$ [1]
5. Montrez que la formule $\Diamond p \rightarrow \Diamond\neg p$ n'est pas valide dans la structure $\langle \mathcal{W}, R \rangle$.

Exercice 2

Montrez que le schéma de formules (5) est valide dans un modèle $\mathcal{M}$ si [2] la relation d'accessibilité de $\mathcal{M}$ est euclidienne. [4 pts]

(5) $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Rappel : une relation R est euclidienne ssi pour tout x, y et z, si xRy et xRz, alors yRz.

Exercice 3

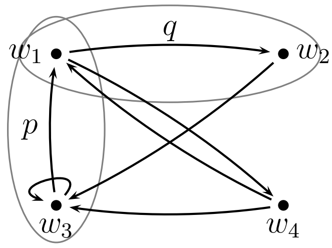
Soit le discours suivant : [8 pts]

(i) Jean n'a pas d'enfant. Mais il se peut qu'il en ait un jour, et dans ce cas, si c'est une fille, il l'appellera sûrement Laura.

1. Traduire les différentes phrases de ce discours en logique modale propositionnelle, en utilisant les propositions suivantes :
   J : Jean a un enfant. F : Jean a une fille. L : la fille de Jean s'appelle Laura.
2. Proposer un modèle qui vérifie ce discours.
3. Traduire les différentes phrases de ce discours en logique modale des prédicats, en utilisant les constantes d'individu et de prédicat suivantes :
   j pour Jean, $E(x, y)$ pour “x est enfant de y”, $F(x)$ pour “x est une fille”, $G(x)$ pour “x est un garçon”, $L(x)$ pour “x s'appelle Laura”.
4. Proposer un modèle qui falsifie ce discours.
5. Quelle partie du discours (i) est rendue fausse par votre modèle ? Changer le discours (i) afin qu'il soit vérifié dans le modèle que vous avez imaginé en 4.

1. Essayez de raisonner en faisant le moins de calcul possible.
2. Il s'agit d'un *si* et non d'un *si et seulement si* ; vous n'avez donc que la moitié de la démonstration à faire.

Exercice 1 1. Dessinez le modèle.

$\mathcal{M}$: 

2. $\Box p$ est vraie dans les mondes qui *n'*accèdent *qu'*à des mondes où p est vraie. On sait que p est vraie dans w_1 et w_3, et w_2 n'accède qu'à w_3, w_3 et w_4 n'accèdent qu'à w_1 et w_3. Donc dans w_2, w_3 et w_4, $\Box p$ est vraie. Et $\Box p$ est fausse dans w_1 car w_1 accède à des mondes où p est fausse.

   De la même façon, $\Box q$ est vraie dans les mondes qui *n'*accèdent *qu'*à des mondes où q est vraie. Mais il n'y a pas de tels mondes. Par exemple, w_4 accède à w_1 (où q est vraie) mais aussi à w_3 (où q est fausse).

3. (a) $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p))$

   Par définition, $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond(\Diamond(p\wedge q) \rightarrow \Box p)) = 1$ ssi il existe au moins un mode accessible à w_1 dans lequel $(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$ est vraie. Les mondes accessibles à w_1 sont w_2 et w_4 ; on doit donc calculer $V_{\mathcal{M},w_2}(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$ et/ou $V_{\mathcal{M},w_4}(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$.

   N'oublions pas que $(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$ est une implication (de la forme $(\varphi \rightarrow \psi)$) et donc qu'elle est vraie dans un monde w ssi $\Diamond(p\wedge q)$ est fausse dans w *ou* $\Box p$ est vraie dans w. Or dans la question 2, on a vu que $\Box p$ est vraie dans w_2 (et aussi w_4). Par conséquent, $(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$ est vraie dans w_2 ($V_{\mathcal{M},w_2}(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p) = 1$). Cela suffit à montrer que $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond(\Diamond(p\wedge q) \rightarrow \Box p)) = 1$, car il existe bien un monde (c'est par exemple w_2) où $(\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$ est vraie.

   (b) $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\Box p \vee \Box\Diamond p)$

   $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\Box p \vee \Box\Diamond p) = 1$ ssi $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\Box p) = 1$ ou $V_{\mathcal{M},w_3}(\Box\Diamond p) = 1$.

   $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\Box p) = 1$ ssi il existe un monde w accessible à w_3 où $V_{\mathcal{M},w}(\Box p) = 1$. Et d'après la question 2, les mondes où $\Box p$ est vraie sont w_2, w_3 et w_4. reste donc à savoir si au moins un de ces mondes est accessible à w_3. C'est le cas, car w_3 est accessible à lui-même. Donc $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\Box p) = 1$, ce qui permet de conclure que $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\Box p\vee\Box\Diamond p) = 1$.

4. $(\Diamond q \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box p$ est valide dans $\mathcal{M}$ ssi elle est vraie dans tous les mondes de $\mathcal{W}$. Et $(\Diamond q \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box p$ est vraie dans un monde w ssi $(\Diamond q \rightarrow \Box q)$ est fausse dans w ou si $\Box p$ est vraie dans w.

   On sait déjà que $\Box p$ est vraie dans w_2, w_3 et w_4 (question 2), donc dans ces trois mondes $(\Diamond q \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box p$ est vraie.

   Reste à vérifier si $(\Diamond q \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box p$ est vraie aussi dans w_1. Autrement dit, a-t-on $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond q \rightarrow \Box q) = 0$? $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond q \rightarrow \Box q) = 0$ seulement dans le cas où $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond q) = 1$ et $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box q) = 0$.

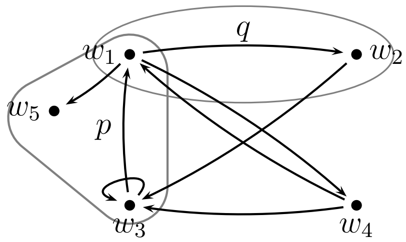
   Calculons d'abord $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond q)$. $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond q) = 1$ ssi il existe un monde accessible à w_1 où q est vraie. Un tel monde existe, c'est w_2. Donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond q) = 1$. Quant à $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box q)$ on sait que ça vaut 0, par la question 2. Donc $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond q \rightarrow \Box q) = 0$, ce qui permet de conclure que $V_{\mathcal{M},w_1}((\Diamond q \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box p) = 1$.

   La formule est vraie dans les 4 mondes du modèle, elle est donc valide dans $\mathcal{M}$.

5. Pour montrer que $\Diamond p \rightarrow \Diamond\neg p$ n'est pas valide dans $\langle \mathcal{W}, R\rangle$ il suffit de construire un contre-exemple, c'est-à-dire un modèle $\mathcal{M}'$ qui partage la même structure (les flèches) que $\mathcal{M}$ et dans lequel il y a au moins un monde w où $\Diamond p \rightarrow \Diamond\neg p$ est fausse.

En fait, on n'a même pas besoin de construire un nouveau modèle $\mathcal{M}'$ car $\mathcal{M}$ fait l'affaire. En effet $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond p) = 1$ car il existe bien au moins un monde accessible à w_3 où p est vraie. En revanche, $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond\neg p) = 0$ car tous les mondes accessibles à w_3 sont des mondes où p est vraie. Donc $V_{\mathcal{M},w_3}(\Diamond p \to \Diamond\neg p) = 0$. Cela prouve que la formule n'est pas valide dans la structure $\langle \mathcal{W}, R \rangle$.

6. Pour que $\Box\Diamond p$ soit vraie dans w_4 il faut que dans tous les mondes accessibles à w_4 (c'est-à-dire w_1 et w_3) $\Diamond p$ soit vraie. Or $\Diamond p$ est vraie dans w_3 mais pas dans w_1. Voici une manière de compléter $\mathcal{M}$ pour rectifier cela :



Exercice 2

1. On démontre d'abord que si R est euclidienne, alors $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ est vraie dans n'importe quel monde.
   (a) On suppose que R est euclidienne. Cela veut dire que pour un monde w quelconque, quelque soient w' et w'', si $w\ R\ w'$ et $w\ R\ w''$, alors $w'\ R\ w''$.
   (b) Soit w un monde quelconque, montrons que $V_{\mathcal{M},w}(\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi) = 1$.
      i. Hypothèse : posons $V_{\mathcal{M},w}(\Diamond\varphi) = 1$. Cela veut dire qu'il existe au moins un monde w_1 accessible à w et tel que φ est vraie dans w_1.
      ii. Calculons, sous cette hypothèse, $V_{\mathcal{M},w}(\Box\Diamond\varphi)$.
      iii. $V_{\mathcal{M},w}(\Box\Diamond\varphi) = 1$ ssi pour tout monde w' accessible à w, il existe un monde w'' accessible à w' tel que φ est vraie dans w''.
      iv. Donc le monde w_1 de l'hypothèse fait partie des mondes w'. C'est-à-dire qu'on a $w\ R\ w'$ et $w\ R\ w_1$.
      v. Et comme R est euclidienne, on en conclut que $w'\ R\ w_1$. Autrement dit, il existe bien au moins un monde accessible à w' et où φ est vraie : c'est w_1.
      vi. Et cela vaut pour n'importe quel w'. Donc la condition iii ci-dessus est vérifiée.
      vii. Donc $V_{\mathcal{M},w}(\Box\Diamond\varphi) = 1$.
2. On démontre maintenant que si $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ est valide, alors R est euclidienne. Pour ce faire, on construit un modèle où R n'est pas euclidienne, et on montre qu'il y a au moins un monde où $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ est fausse.
   (a) Soit le modèle suivant : $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, R, V \rangle$, avec $\mathcal{W} = \{w_1 ; w_2 ; w_3\}$; $w_1\ R\ w_2$, $w_1\ R\ w_3$, $w_2\ R\ w_2$ et $w_3\ R\ w_1$; et $V_{\mathcal{M},w_2}(p) = 1$, $V_{\mathcal{M},w_1}(p) = V_{\mathcal{M},w_3}(p) = 0$.
   (b) R est bien non euclidienne, car $w_1\ R\ w_2$ et $w_1\ R\ w_3$, mais on n'a pas $w_2\ R\ w_3$.
   (c) Or $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond p \to \Box\Diamond p) = 0$.
   (d) En effet, $V_{\mathcal{M},w_1}(\Diamond p) = 1$, car il y a bien un monde accessible à w_1 où p est vraie, c'est w_2.
   (e) Mais $V_{\mathcal{M},w_1}(\Box\Diamond p) = 0$, car ce n'est pas vrai que tous les mondes accessibles à w_1 envoient sur un monde où p est vraie. : w_3 est accessible à w_1, mais le seul monde accessible à w_3 est w_1 et p est fausse dans w_1.

Exercice 3 (8 points)
Soit le discours suivant :
(i) Jean n'a pas d'enfant. Mais il se peut qu'il en ait un jour, et dans ce cas, si c'est une fille, il l'appellera surement Laura.

a) Traduire les différentes phrases de ce discours en logique modale propositionnelle, en utilisant les propositions suivantes : J : Jean a un enfant. F : Jean a une fille. L : la fille de Jean s'appelle Laura

• *Jean n'a pas d'enfant :* $\neg \mathbf{J}$
• *Mais il se peut qu'il en ait un jour, et dans ce cas, si c'est une fille, il l'appellera surement Laura.*
On va distinguer, dans cette phrase, deux propositions, coordonnées par un « et » : « Il se peut qu'il en ait un jour » et « dans ce cas, si c'est une fille, il l'appellera sûrement Laura ». Le « mais » initial correspondra, au niveau du discours glodal, à une coordination.

1. *Il se peut qu'il en ait un jour* signifie qu'il est possible que Jean ait des enfants dans le futur. Il y a donc deux modalités, une modalité aléthique et une modalité temporelle : $\Diamond\mathbf{FJ}$. On ne peut pas omettre la modalité temporelle F. $\neg J \wedge \Diamond J$ se traduirait en langue naturelle par « Jean n'a pas d'enfant mais aurait pu en avoir ». Si on ne donne pas d'indication temporelle, on a un contrefactuel. C'est différent d'une possibilité future.
2. *Dans ce cas, si c'est une fille, il l'appellera sûrement Laura.* « Dans ce cas » signifie « si Jean a un enfant un jour ». *Avoir une fille*, c'est plus informatif que *avoir un enfant*. Il n'est donc pas nécessaire de traduire « Si Jean a un enfant et si Jean a une fille, …. » $((J \wedge F) \rightarrow \ldots)$. « Si Jean a une fille » $(F \rightarrow \ldots))$ suffit, puisque « avoir une fille » implique « avoir un enfant ». Il y a aussi une modalité associée à l'adverbe « sûrement ». On doit donc représenter formellement : « Si Jean a une fille un jour, il l'appellera sûrement Laura » : $\mathbf{FF} \rightarrow \Box\mathbf{L}$. Les deux F n'ont pas le même sens : l'un est l'opérateur modal qui indique le futur, l'autre est la lettre de proposition correspondant à « Jean a une fille ».

En conclusion, le discours dans sa totalité peut être associé à la formule propositionnelle modale : $\neg \mathbf{J} \wedge \Diamond\mathbf{FJ} \wedge (\mathbf{FF} \rightarrow \Box\mathbf{L})$.
Une autre formule, qui « collerait » plus à la langue naturelle mais serait moins économique serait : $\neg \mathbf{J} \wedge \Diamond\mathbf{FJ} \wedge ((\mathbf{FJ} \rightarrow (\mathbf{FF} \rightarrow \Box\mathbf{L}))$.

b) Proposer un modèle qui vérifie ce discours.
On peut considérer un modèle avec quatre mondes : le monde réel, w0 dans lequel Jean n'a pas d'enfants, deux mondes possibles w1 et w2, reliés à w0 et présentés comme futurs par rapport à w0, tels que :
- en w1, Jean n'a pas d'enfant,
- en w2 Jean a une fille qui s'appelle Laura

Et un autre monde possible, w3, qui est futur par rapport à W0 et dans lequel Jean a une fille qui ne s'appelle pas Laura.

w0 : $\neg J$ → w1 : $\neg J$
→ w2 : J, F, L
w3 : J, F, $\neg L$

c) Traduire les différentes phrases de ce discours en logique modale des prédicats, en utilisant les constantes d'individu et de prédicat suivantes : j pour Jean, E(x,y) pour 'x est enfant de y', F(x) pour 'x est une fille', G(x) pour 'x est un garçon', L(x) pour 'x s'appelle

Laura'.

- *Jean n'a pas d'enfant* : $\neg\exists x\ (E(x,j))$
- *Il se peut qu'il en ait un jour :* $\Diamond F\ (\exists x\ (E(x,j))$
- *Dans ce cas, si c'est une fille, il l'appellera sûrement Laura* :

  $(F\ \exists x\ (E(x,j) \rightarrow (F(x) \rightarrow \Box L(x))\ )\ )$

d) Proposer un modèle qui falsifie ce discours.

On peut rendre faux n'importe lequel des trois termes conjoints pour falsifier la formule. Dans le modèle suivant, on falsifie le premier terme en considérant un seul monde, le monde actuel, w0, dans lequel Jean a un enfant. Pour simplifier le modèle, je représente les mondes au moyen de formules propositionnelles et non prédicatives.

w0 : J

Une autre façon de falsifier le discours serait de falsifier le second terme et de ne considérer aucun monde accessible depuis le monde actuel dans lequel Jean aurait un enfant.

$$\begin{tikzcd} w0 : \neg J \arrow[r] \arrow[dr] & w1 : \neg J \\ & w2 : \neg J \end{tikzcd}$$

Une dernière façon de le faire serait de falsifier le troisième terme et de considérer par exemple parmi les mondes futurs accessibles depuis w0 un monde, ici w1, dans lequel Jean aurait une fille qui ne s'appellerait pas Laura. En w3, G signifie jean a un garçon.

$$\begin{tikzcd} w0 : \neg J \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & w1 : J, F, \neg L \\ & w2 : J, F, L \\ & w3 : J, G \end{tikzcd}$$

e) Quelle partie du discours (i) est rendue fausse par votre modèle. Changer le discours (i) afin qu'il soit vérifié dans le modèle que vous avez imaginé en d).

Considérons le dernier des modèles ci-dessus. Il vérifie le discours suivant : « Jean n'a pas d'enfant, mais il se peut qu'il en ait un jour et si c'est une fille, elle s'appellera peut-être Laura.