Chapitre 2

Sémantique vériconditionnelle et calcul des prédicats

2.1 Introduction à la sémantique vériconditionnelle

2.1.1 Sens, dénotation et référence

Les phrases (ou énoncés) de la langue nous permettent de parler des choses, du monde, c'est-à-dire de la réalité. Elles nous permettent assurément d'exprimer et de faire d'*autres* choses, mais il semble très difficile d'écarter cette vocation à commenter le réel. Par conséquent la sémantique doit être amenée à s'intéresser – entre autres – aux rapports entre les entités linguistiques (mots, syntagmes, phrases) et les entités du monde (choses). Il y a beaucoup de manières (philosophiques ou cognitives, pratiques ou théoriques) d'envisager ces rapports[1]. Nous allons nous en tenir à une vision assez claire et très classique, initiée par Frege (1892b)[2] dans son célèbre article « *Über Sinn und Bedeutung* » (en français « Sens et dénotation »).

Partant d'une démarche avant tout philosophique, en cherchant à asseoir solidement une théorie générale de la connaissance, Frege pose une distinction fondamentale entre d'une part le **sens** et d'autre part la **dénotation** d'une expression linguistique – les termes originaux employés par Frege sont respectivement *Sinn* et *Bedeutung*. Notons tout de suite que *Bedeutung* est parfois traduit par **référence** (ou **référent**)[3], cela se présente parfois comme une variante terminologique libre ;

[1]Il n'est pas de mise, dans cet ouvrage, de défendre, ni même de justifier un certain paradigme de théorie sémantique, en l'occurrence celui de la sémantique formelle vériconditionnelle. Ce paradigme est ici tenu pour admis – ne serait-ce que par hypothèse de travail – puisque le présent manuel se consacre à le présenter. C'est d'ailleurs à cet égard plus qu'une hypothèse, c'est un présupposé. Et cela inclut fondamentalement une incontournable relation entre la langue, en tant que système, et ce qui lui est, d'une manière ou d'une autre, extérieur et que nous appellerons ici la réalité. Sur ce point et en particulier sur ce qu'il convient de concevoir comme réalité extra-linguistique dans une perspective sémantique, je ne peux que recommander la lecture du premier chapitre de Kleiber (1999).

[2]Frege (1892b), ainsi que Frege (1892a), sont des lectures très abordables et incontournables. Les travaux de Frege peuvent être tenus pour le point de départ de la sémantique formelle (ainsi que de la logique moderne).

[3]Il faut ajouter que dans le langage courant, c'est-à-dire hors du vocabulaire technique des linguistes, *Bedeutung* est aussi traduit par *signification*. Mais cette traduction n'est guère appropriée pour nommer la notion identifiée par Frege ; de plus nous essaierons ici de ne pas retenir *signification* comme un terme technique, c'est-à-dire que nous ne lui attribuerons pas une définition précise et scientifique, et nous l'utiliserons dans son acception quotidienne.

cependant nous ferons ici (dans les pages qui suivent) une distinction subtile entre référence et dénotation.

Définition 2.1 (Dénotation)
La **dénotation** d'une expression linguistique est l'objet du monde que cette expression désigne.

Cette définition est une première approximation et nous la raffinerons plus tard. Regardons tout de suite l'exemple de Frege : « *l'étoile du matin* » et « *l'étoile du soir* ». Ces deux expressions ont la même dénotation car elles désignent le même objet céleste : la planète Vénus[4]. La dénotation est donc cette notion qui incarne directement la relation entre les éléments linguistiques et les entités de la réalité. Cependant Frege montre que la dénotation ne peut pas suffire à décrire le rôle (qu'on appellera plus tard *sémantique*) d'une expression dans une phrase, et que ce qui importe c'est, finalement, le *sens* de l'expression. Et « l'étoile du matin » et « l'étoile du soir » n'ont pas le même sens. C'est ce que révèle, par exemple, le test de substitution suivant :

(1) L'étoile du matin est l'étoile du soir.

(2) L'étoile du matin est l'étoile du matin.

La phrase (2) est obtenue en remplaçant dans la phrase (1) le second groupe nominal (*l'étoile du soir*) par un autre groupe nominal qui a la même dénotation (en l'occurrence *l'étoile du matin*). Cette phrase (2) est vraie par nécessité, elle le sera toujours, sa vérité est inscrite dans sa forme : c'est une **tautologie**. Et en tant que telle, elle n'apporte aucune information pertinente. En revanche, la phrase (1), elle, apporte de l'information, elle est intéressante, elle n'est pas une tautologie. Ces deux phrases sont loin d'être synonymes : elles ne disent pas la même chose. Puisque « *l'étoile du matin* » et « *l'étoile du soir* » ont la même dénotation, rien ne distingue (2) de (1) du strict point de vue dénotationnel. D'ailleurs on s'en tenait uniquement aux dénotations, les deux phrases reviendraient simplement à un schéma équatif de la forme : "vénus = vénus". On voit bien que ce qui les distingue, c'est autre chose : c'est le sens des expressions qu'elles contiennent.

Comment Frege définit-il le **sens** ? Si la dénotation est l'objet du monde désigné par l'expression, son sens est « le mode de donation » de cet objet. Par mode de donation, il faut comprendre *ce qui nous donne la dénotation de l'expression*. On peut voir le sens comme une construction linguistique[5], c'est-à-dire la fonction intellectuelle qui permet d'appréhender un objet du monde à partir d'une expression. Adoptons cette définition.

Définition 2.2 (Sens)
Le **sens** d'une expression est ce qui nous permet de connaître la dénotation de cette expression.

[4] A noter que le nom propre « *Vénus* » a ici, lui aussi, cette même dénotation.

[5] Frege insiste sur la distinction entre le sens et la représentation mentale (et donc subjective) que le locuteur peut se faire d'un objet. Le sens est conventionnel, consensuel dans la mesure où il est ancré au code de la langue.

Le sens n'est donc pas la dénotation, mais il est défini à partir d'elle. On peut le voir comme une sorte de mécanisme d'*attribution* d'objets à des expressions de la langue. Cela peut paraître un peu abstrait de prime abord (mais après tout, le sens est une notion relativement abstraite), mais nous verrons au fil des pages de ce manuel (jusqu'au chapitre 4) que la définition de Frege est suffisante pour développer notre théorie sémantique et pour recevoir une formalisation précise.

Voici une autre paire d'expressions qui ont la même dénotation mais des sens différents : « *le vainqueur d'Iéna* » et « *le vaincu de Waterloo* »[6]. Ici la différence de sens ne réside pas dans l'éventuel contraste de connotations « affectives » ou appréciatives qui pourraient venir se greffer sur les mots *vainqueur* et *vaincu*. Les sens de ces deux groupes nominaux diffèrent car pour en connaître les dénotations, il faut être au fait, d'une part, de l'issue de la bataille d'Iéna, savoir qui l'a remportée (et donc savoir ce qui signifie *vainqueur*), et d'autre part, savoir qui a perdu la bataille de Waterloo (en sachant donc ce que signifie *vaincu*). Il se trouve que dans les deux cas, la réponse est Napoléon, qui est la dénotation commune des deux expressions, mais on voit bien qu'on y a accédé par deux cheminements (c'est-à-dire deux sens) distincts.

Frege souligne que différentes expressions de la langue peuvent avoir le même sens (*la somme de 1 et 3* et *la somme de 3 et 1*[7]), que des expressions de sens distincts peuvent avoir la même dénotation (par exemple *l'étoile du matin* et *l'étoile du soir*), et des expressions peuvent avoir un sens mais pas de dénotation (par exemple on peut concevoir le sens de *la suite qui converge le moins rapidement* bien qu'elle n'existe pas ; de même pour *le plus grand nombre premier* ou *un cercle carré* ; et c'est précisément parce que l'on perçoit leurs sens que l'on sait que ces expressions n'ont pas de dénotation).

Référence et référent Avant de poursuivre, ouvrons une petite parenthèse terminologique et notionnelle qui pourra s'avérer utile par la suite. Le terme de **référence** est souvent employé comme synonyme de dénotation, et ce en vertu de la définition qu'on lui assigne couramment. En effet on appelle référence la relation qui s'établit entre une expression et ce dont parle un locuteur en utilisant cette expression. Ainsi on dira que « *le vainqueur d'Iéna* » fait référence, ou réfère, à Napoléon. Et on dira conséquemment que Napoléon est le **référent** de l'expression. Cela coïncide bien avec la dénotation.

Cependant on peut (et même on doit) appréhender ces deux notions de deux points de vue différents. D'une certaine manière, la référence a un pied dans la pragmatique, dans la mesure où sa définition fait intervenir le locuteur. On peut d'ailleurs faire ici une remarque similaire à celle faite en § 1.3.2 (p. 26) sur l'idée de *vouloir dire* : si on peut dire que le groupe nominal « *le vainqueur d'Iéna* » fait référence à Napoléon, on peut dire que c'est également le locuteur qui, en prononçant

[6] Exemple tiré de Lyons (1977), qui l'emprunte à Husserl.

[7] Cet exemple est loin d'être trivial. On le sait, une simple modification de l'ordre des mots peut avoir des répercussions sémantiques non négligeables, y compris dans les expressions qui parlent d'opérations mathématiques. Comparez *le produit de 3 par 2* vs. *le produit de 2 par 3* avec *la division de 3 par 2* vs. *la division de 2 par 3*.

ce groupe nominal, fait référence à Napoléon. Il s'ensuit que la référence se présente comme un lien *contingent* entre une expression employée et un objet du monde ; elle pointe sur ce à quoi le locuteur pense lorsqu'il utilise telle ou telle expression. C'est donc un *fait* attaché à un énoncé et dont est responsable le locuteur ; certains philosophes parlent d'ailleurs à ce propos d'*acte de référence*[8]. Au contraire on considérera que la dénotation est une *propriété* sémantique (donc linguistique) des expressions et que cette propriété est envisageable indépendamment du contexte et de ce que pense le locuteur. Bien entendu il ne s'agit pas là d'une violente opposition de notions ; c'est, comme nous l'avons dit, une question de points de vue. Et dans la plupart des cas, c'est parce que telle expression a la propriété de dénoter tel objet qu'un locuteur la choisira pour faire référence à l'objet en question. C'est pourquoi les deux notions se superposent très simplement, surtout lorsque l'on se focalise sur les propriétés sémantiques des productions linguistiques, comme nous le ferons dans l'essentiel de ce manuel (même si nous revendrions un peu sur la question dans le chapitre 3, § 3.3.4).

2.1.2 Sens et conditions de vérité

Revenons à l'opposition entre sens et dénotation. Ce que nous avons illustré jusqu'ici s'applique à des groupes nominaux (GN), et plus précisément à des GN qui fonctionnent comme des noms propres. Dans son article, Frege précise également ce que sont le sens et la dénotation d'une phrase déclarative. Dans ses termes, le sens d'une phrase est une pensée (*Gedanke*, en v.o.), et sa dénotation la **valeur de vérité** de la phrase.

La valeur de vérité d'une phrase, c'est tout simplement *vrai* ou *faux*, selon que la phrase en question est jugée vraie ou fausse. Nous retrouvons ici le rôle important que joue la vérité dans la théorie sémantique (cf. § 1.2.1 au chapitre précédent). Cela peut paraître un peu contre-intuitif de considérer ces concepts abstraits, le vrai et le faux, comme des dénotations, c'est-à-dire des objets du mondes, au même titre que ce que nous avons déjà vu, par exemple une planète ou un être humain (qui eux sont des objets tangibles). Mais examinons un instant ce qu'est au juste la vérité d'une phrase. Une phrase est vraie, ou jugée vraie, si elle est conforme à la réalité, c'est-à-dire aux faits qui constituent l'agencement du monde tel qu'il est ; et la phrase est jugée fausse dans le cas contraire. On constate donc que les valeurs de vérité ont à voir avec l'univers des dénotations, la réalité. Il y a d'autres justifications à cette proposition de Frege. L'une d'elles est que la valeur de vérité d'une phrase ne change pas si dans cette phrase on remplace un constituant, par exemple un GN, par un autre qui à la même dénotation. C'est ce qu'illustrent les exemples (3) et (4) : si (3) est vraie, alors forcément (4) l'est aussi, car les deux GN sujets ont la même dénotation (les deux phrases parlent du même individu).

[8] Le titre de l'article de Strawson (1950), « *On referring* », a été traduit en français par « De l'acte de référence », et le chapitre 4 de Searle (1969) s'intitule, dans la traduction française, « La référence comme acte de langage ». Sur la distinction entre référence et dénotation, on peut également se reporter au chapitre 7 de Lyons (1977), en prenant garde au fait qu'il a un usage terminologique légèrement différent de celui que nous adoptons ici – notamment concernant la dénotation.

En revanche si on leur substitue un GN qui diffère par sa dénotation, comme en (5), la valeur de vérité de la phrase peut changer. Cela vient appuyer l'idée que la dénotation du tout (ie la valeur de vérité de la phrase) est étroitement déterminée par la dénotation de ses parties (entre autres ses GN).

(3) Le vainqueur d'Iéna est mort en 1821.

(4) Napoléon est mort en 1821.

(5) Jules César est mort en 1821.

Enfin ajoutons que l'assimilation de la dénotation d'une phrase déclarative à sa valeur de vérité permet de qualifier sémantiquement les différents types (grammaticaux) de phrases de la langue. Toutes les phrases déclaratives, et seulement elles, ont (ou dénotent) une valeur de vérité, et en cela elles s'opposent aux interrogatives, impératives et exclamatives. En vertu de la proposition de Frege, on peut donc établir que les différents types de phrase se caractérisent sémantiquement par différents types de dénotation[9].

Venons-en maintenant au sens des phrases déclaratives. L'inter-relation entre sens et dénotation, que pose Frege, vaut toujours ici : le sens est ce qui nous permet de trouver (systématiquement) la dénotation (possible) d'une expression. Cela va nous permettre d'appréhender un peu plus clairement la notion de sens, qui jusqu'ici restait un peu énigmatique. Appliqué aux phrases, cela nous donne le principe suivant.

Principe 2.1
Comprendre une phrase c'est être *capable*, *d'une manière ou d'une autre*, de juger de sa vérité.

Et comprendre une phrase signifie en percevoir le sens. Le principe ne fait donc rien d'autre que de reformuler la définition 2.2 pour le cas particulier des phrases. Mais il faut expliciter un peu ce « *d'une manière ou d'une autre* ». Souvenons-nous que la vérité d'une phrase n'est jamais absolue. Elle *dépend* de circonstances (cas de figure), et précisément les circonstances qui forment la réalité, qui font que le monde est tel qu'il est. Ainsi si l'on sait qu'une phrase donnée est vraie ou fausse, c'est que l'on connaît certaines informations sur l'état du monde. Et réciproquement, si on dispose des informations nécessaires, on saura dire si une phrase (que l'on comprend) est vraie ou fausse. En bref, comprendre une phrase, c'est savoir effectuer un appariement entre elle et la configuartion du monde. Cela nous permet d'expliciter le principe précédent de la manière suivante.

Principe 2.2 (Sémantique vériconditionnelle)
Connaître le sens d'une phrase (déclarative) c'est savoir comment doit, ou devrait, être le monde pour que cette phrase soit vraie.

[9]Nous n'aborderons pas dans ce manuel la sémantique des phrases non déclaratives (au delà des remarque d'ordre pragmatique faites au chapitre précédent). Mais nous indiquerons quelques pistes et quelques renvois bibilographiques dans le dernier chapitre. A présent, dans ce qui suit, le terme *phrases* tout court sera utilisé pour faire référence simplement aux phrases déclaratives.

Pour dire les choses autrement : savoir ce que signifie une phrase, c'est savoir *dans quelles conditions* elle est vraie. C'est pourquoi on considère que le sens d'une phrase consiste en ses **conditions de vérité**. Lorsqu'une théorie sémantique s'appuie sur ce principe, elle est dite **vériconditionnelle**. Nous allons voir un exemple de formulation de conditions de vérité (et nous en verrons beaucoup d'autres tout au long de ce manuel), mais auparavant il est nécessaire de bien appuyer ce point : savoir dans quelles conditions une phrase est vraie ne signifie pas savoir si elle est effectivement vraie. C'est pour cette raison que le principe 2.1 insiste sur « être capable ». Ce « être capable » sous-entend « si on a les informations nécessaires sur le monde ». Mais en soi, ces informations ne sont pas utiles pour connaître le sens d'une phrases. Prenons par exemple (6) :

(6) Il y quatorze planètes qui gravitent autour de l'étoile Sirius.

Personne, y compris les astrophysiciens, ne connaît aujourd'hui la dénotation de cette phrase, mais elle est parfaitement compréhensible : son sens est clair. C'est-à-dire que l'on sait dire dans quels cas elle s'avérera vraie : (6) est vraie si et seulement s'il existe dans la galaxie au moins quatorze objets qui sont de grandes masses de matière à peu près sphériques, ie des planètes, qui se déplacent sur des trajectoires circulaires ou elliptiques autour d'un objet très grand et lumineux, une étoile, connu sous le nom de Sirius. Cette description constitue précisément les conditions de vérité de (6). Reste à savoir si notre univers vérifie bien ces conditions – auquel cas (6) sera admise comme vraie – et c'est l'observation astronomique qui pourra nous le dire, et se faisant, augmentera notre connaissance du monde (en l'occurrence de l'univers ou du cosmos).

Ainsi, établir la vérité ou la fausseté, c'est-à-dire la dénotation, des phrases, d'une manière générale, n'est pas l'affaire des sémanticiens[10] mais plutôt des scientifiques de la nature, des historiens, des philosophes etc., voire des juges ou des détectives. Connaître les dénotations n'est pas une fin en soi en sémantique, mais s'interroger sur les dénotations est un moyen de décrire le sens. C'est ce que dit le principe 2.2, car on peut en tirer la règle méthodologique suivante : décrire le sens d'une expression c'est spécifier les règles de calcul de sa dénotation ; on n'a pas besoin de mener ce calcul jusqu'au bout, car pour cela il faudrait connaître des informations plus ou moins précises sur le monde, c'est pourquoi il faut s'assurer que ces règles de calcul puissent marcher pour n'importe quelle configuration du monde.

Pour terminer et résumer cette section, voici un autre exemple. Soit la phrase :

(7) Le père d'Alexandre le Grand était boiteux.

Et supposons que je vous demande la dénotation de cette phrase, ie que je vous demande si elle est vraie ou fausse. *A priori*, vous ne savez probablement pas répondre. Mais si vous voulez trouver la solution, que pouvez-vous faire ? Vous pouvez, par exemple, aller consulter une *encyclopédie* ou un livre d'Histoire, qui

[10] Sauf bien sûr lorsqu'il s'agit de phrases qui portent sur le sens linguistique.

donnera des informations historiques sur le monde ; mais vous n'irez certainement pas consulter un *dictionnaire* de langue comme le Petit Robert. Vous iriez regarder un dictionnaire seulement si vous aviez un doute sur le sens de cette phrase, ou de certaines de ses parties ; et le dictionnaire vous aiderait ainsi à déterminer les *conditions* de vérités de (7). Mais ce n'est pas ce dont vous avez besoin, car vous connaissez ces conditions de vérité ; elles disent approximativement qu'il faut et il suffit qu'il ait existé un individu de sexe masculin qui avait, disons, un jambe plus courte que l'autre et qui avait un fils connu sous le nom d'Alexandre le Grand[11]. Ce dont vous avez besoin, et que vous pourrez trouver dans une encyclopédie, c'est une information sur les *faits* réels (historiques) : une information d'ordre « anatomique » sur l'homme qui était le père d'Alexandre. Ensuite vous n'avez plus qu'à vérifier si cette information encyclopédique respecte ou non les conditions de vérité de la phrase, pour en déduire la dénotation.

2.1.3 La compositionnalité

Jusqu'à présent, nous avons vu les dénotations des GN et des phrases. Nous savons quel genre de dénotation correspond à (au moins) certains GN : des objets du monde ; et quel genre de dénotation correspond aux phrases déclaratives : le vrai ou le faux. Evidemment, on sera intéressé de connaître aussi à quels genres de dénotation correspondent les autres catégories de constituants (parties du discours) de la langue : les verbes, les noms (substantifs), les adjectifs, les déterminants, les prépositions, etc. Nous verrons cela au fur et à mesure dans les pages qui suivent, car en fait il sera assez simple de déduire ces types de dénotations les unes des autres. Pour le moment, je vais introduire un principe important de la sémantique vériconditionnelle, et qui justement permettra de déduire les types de dénotation des autres catégories grammaticales.

Il s'agit du **principe de compositionnalité**[12]. Nous l'avons entr'aperçu dans la section précédente en disant que la dénotation du tout dépend de la dénotation de ses parties. Mais le principe va plus loin. En voici une première formulation que l'on retrouve assez couramment dans la littérature :

Principe 2.3 (Principe de compositionnalité (I))
La signification d'une expression *dépend* de la signification de ses parties.

Notons tout d'abord que cette formulation utilise un terme que nous n'avons guère manipulé : « signification ». Il s'agit ici de ce que nous avons défini précédemment comme le sens. Mais si le principe 2.3 est ainsi formulé, c'est souvent

[11] Ces conditions de vérité sont approximatives car d'abord on peut être boiteux pour une autre raison que celle indiquée ici, et car aussi ce n'est pas exactement ainsi que l'on spécifie les conditions de dénotation pour un GN défini comme « le père de... » ; nous y reviendrons au chapitre suivant, § 3.3.4.

[12] Le principe est parfois aussi appelé *principe de Frege*, ce qui est sujet à caution car Frege n'en a jamais fait mention dans ses écrits. Cependant on considère habituellement que le principe est particulirement fregéen dans l'esprit. Pour plus détails sur la compositionnalité, voir Partee (1984).

pour tirer profit du caractère peu technique du terme de signification, car le principe s'applique également à la dénotation des expressions (donc ici signification recouvre à la fois sens et dénotation).

Maintenant examinons ce qu'exprime et implique ce principe. La compositionnalité repose naturellement sur l'idée de composition, et de son opération inverse, la décomposition. En cela elle incarne simplement le procédé d'*analyse* (au sens premier du terme) sémantique : on reconstitue le sens d'une expression en la décomposant en ses parties, ces parties ont elles-mêmes un sens et ces « petits » sens se composent (ou combinent) entre eux pour donner le sens de l'expression globale. On peut voir cela comme une arithmétique sémantique élémentaire. Mais le principe a des fondements plus importants, car il illustre en quelque sorte le pendant sémantique de l'aspect *génératif* de la description grammaticale défini par Chomsky (1957). Nous sommes capables d'interpréter une infinité potentielle de phrases de la langue, même si nous n'avons j'amais entendu ou lu ces phrases. Il est évident que nous n'apprenons des listes de sens de phrases les uns après les autres, puisque ces phrases sont en nombre infini. Nous comprenons une phrase parce que nous connaissons le sens de ses constituants (syntagmes, mots, morphèmes) et que nous savons assembler ces sens. C'est ce que pose le principe de compositionnalité, de manière assez stricte car il semble assujettir fermement le sens d'une phrase à celui de ses unités constituantes.

A cet égard, plusieurs critiques ont été émises à l'encontre du principe. J'en mentionnerai et commenterai ici trois[13]. Le première, et la moindre, est qu'il ne suffit pas de connaître le sens des mots pour établir le sens d'une phrase, il est également nécessaire de tenir compte de son ordonnancement syntaxique. Cela paraît évident si l'on compare (8a) et (8b) où les mêmes mots n'occupent pas la même position syntaxique.

(8) a. Un hélicoptère a survolé un porte-avion.
    b. Un porte-avion a survolé un hélicoptère.

C'est pourquoi le principe de compositionnalité est généralement amendé de la façon suivante :

Principe 2.4 (Principe de compositionnalité (II))
La signification d'une expression est *fonction* de la signification de ses parties et de leur mode de combinaison syntaxique.

C'est cette version du principe que nous prendrons en compte dorénavant. Notons au passage que, dans sa formulation, « dépendre » a été remplacé par « être fonction », ce qui revient au même ; on dit aussi parfois que la signification d'une expression est *une fonction* de la signification de ses parties etc., ce qui donne un petit air mathématique au principe, mais nous prépare également à des éléments de formalisation que nous verrons au chapitre 5.

[13] Voir Godard (2006) pour un panorama plus détaillé.

Une autre critique repose sur le fait que le sens d'une phrase dépend également (et parfois totalement) du contexte, ce que le principe ne mentionne pas. Nous en avions fait l'expérience au chapitre précédent notamment avec les implicatures, les significations illocutoires et les actes de langage indirects. Mais, comme je l'avais précisé, ces significations pragmatiques se distinguent du sens littéral, qui est ce qui fait l'objet de l'étude sémantique (dans ce manuel). La compositionnalité est une propriété sémantique du langage et ne concerne véritablement que les sens littéraux. Et c'est au-delà de l'application du principe (et donc de l'analyse sémantique) que s'opère un calcul interprétatif pragmatique, qui n'annule cependant pas la validité du principe de compositionnalité car le sens littéral sert de point de départ à ce calcul.

Enfin, la troisième critique concerne les expressions idiomatiques, c'est-à-dire des expressions plus ou moins figées et souvent imagées telles que *casser sa pipe*, *prendre une veste*, *sucrer les fraises* ou *jeter le bébé avec l'eau du bain* etc. La particularité de ces expressions est que non seulement leur sens ne se résume pas à la composition du sens de leurs parties, mais en plus qu'il n'a souvent rien à voir. Lorsque l'on dit de quelqu'un qu'il va jeter le bébé avec l'eau du bain, il n'y a souvent aucun bébé dans l'histoire. Mais si à ces expressions on applique le principe de compositionnalité « jusqu'au bout », on obtient un sens littéral qui n'est généralement pas celui voulu par le locuteur. Et il ne s'agit pas ici d'implicatures, car les sens des idiomes est parfaitement codifié et conventionnel, on peut le trouver dans un dictionnaire. C'est là une réelle mise en échec de la compositionnalité ; mais il y a néanmoins une manière de contourner ce problème en prenant la précaution suivante : on considère que les idiomes sont des expressions composées (des locutions) et qui à ce titre ne doivent pas être décomposées sémantiquement, mais plutôt être traitées d'un bloc (après tout *casser sa pipe*, par exemple, n'est qu'une manière coquette de dire *mourir*) en y empêchant l'application du principe.

En conclusion, même si le principe de compositionnalité peut être mis en défaut et sembler parfois insuffisant, nous considérerons ici qu'il est nécessaire à l'analyse sémantique et nous en tiendrons compte comme outil d'investigation.

2.1.4 Analyse sémantique formelle

Récapitulons. Toute expression interprétable a une dénotation, ou est au moins susceptible d'en avoir une (n'oublions pas que certaines expressions ne dénotent rien). La dénotation d'une expression est toujours relative à un certain état du monde, celui par rapport auquel le locuteur situe le contenu de son propos. Le sens d'une expression est ce qui détermine sa dénotation pour tout état du monde possible. Décrire le sens d'une expression, ce qui est l'objet de la sémantique, revient donc à donner les règles de calcul de sa dénotation (ou de son absence de dénotation, le cas échéant) ; c'est-à-dire, dans le cas particulier des phrases, les conditions de vérité. Les conditions de vérité sont des stipulations sur le monde, elles ne disent pas comment est le monde mais comment il devrait être pour qu'une phrase soit vraie. On peut, comme nous l'avons fait précédemment, exprimer ces conditions dans notre langage de tous les jours, le français, mais cela deviendrait rapidement lourd et incommode lorsque l'on sera amené à analyser des phrase un peu compliquées, de plus on risquerait d'y perdre en précision, sachant que les langues naturelles, comme le français, comportent leur part inévitable de vague et de polysémie. Pour exprimer des descriptions sémantiques, nous nous devons d'être précis et explicites. C'est pourquoi une méthode couramment employée en sémantique consiste à utiliser un langage symbolique, artificiel et formel dans lequel on formule de manière concise et précise le sens des expressions de la langue que l'on étudie. L'intérêt d'un tel langage, assez éloigné des langues naturelles dans sa structure, est qu'il permet, lorsque l'on en est familier, de lire immédiatement et directement dans ses formulations les conditions de vérité qu'il représente, aussi facilement que l'on voit immédiatement une opération d'addition dans l'écriture mathématique « $4 + 3$ ». D'ailleurs le langage de représentation sémantique que nous allons voir est emprunté aux mathématiques et plus exactement à la logique et ce que l'on appelle le **calcul des prédicats**. On lui donne donc habituellement le nom de langage du calcul des prédicats, mais dans ce manuel nous l'appellerons le **langage objet** ou LO, d'abord pour bien insister sur le fait qu'il sera en grande partie l'objet de notre étude[14], et ensuite parce qu'il sera amené à évoluer au cours des pages jusqu'à s'éloigner un peu de ce que l'on appelle traditionnellement le langage du calcul des prédicats (même s'il en conservera les fondements). Ce chapitre cependant se consacre à la présentation des bases classiques du calcul des prédicat, d'où les intitulés du chapitre et de la section qui suit. Une des tâches de la description sémantique va donc maintenant consister à traduire des expressions du français dans ce langage formel LO, et pour mener à bien ces opérations de traduction, il nous faut apprendre à « parler couramment le LO ».

2.2 Le langage du calcul des prédicats

Le calcul des prédicats est une branche assez ancienne de la logique classique[15], mais il a commencé à être formalisé, au moyen de systèmes d'écriture symbolique, appelés aussi des idéographies, à partir de la fin du XIX^e et au début du XX^e siècle, notamment par les travaux de C. Pierce, G. Frege, G. Peano, B. Russell et de bien d'autres par la suite. Ce type de langages visait surtout à exprimer sans équivoque des énoncés mathématiques et à formaliser des principes de logique. Mais son application à la représentation du sens des phrases (plus ou moins courantes) des langues naturelles fut également assez précoce et prit un essor important à partir années 1960 notamment (mais pas seulement) avec les travaux de R. Montague. Montague, qui était philosophe et logicien, et bien qu'il ne s'inscrivait pas du tout dans le cadre de la grammaire générative, a eu un rôle important dans le développement de la linguistique formelle (et plus exactement la sémantique formelle) telle qu'a pu l'initier Chomsky. Chomsky a défendu la thèse que le langage naturel peut être traité (ie analysé) comme un système formel ; Montague est allé plus loin dans

[14] Pour être tout à fait exact, l'objet de notre étude sémantique ici est également, et probablement avant tout, le français. Mais nous étudierons la sémantique du français par l'intermédiaire du langage symbolique LO, qui fera l'objet d'observations et de commentaires.

[15] Il est déjà présent chez Aristote et dans la syllogistique médiévale.

cette idée en posant que le langage naturel peut être traité comme un système formel *interprété*[16], c'est-à-dire un système muni d'une sémantique (ce qu'avait écarté Chomsky). Et ce système est bien sûr celui du calcul des prédicats. Les théories d'analyse sémantique développées par Montague[17] sont regroupées aujourd'hui sous le nom de *Grammaire de Montague* (il s'agit plus d'une famille de grammaires que d'un formalisme unique). Et c'est dans ce paradigme d'analyse sémantique que se place le présent manuel.

Comme nous l'avons vu plus haut, l'analyse sémantique consiste donc à expliciter les conditions de vérité des phrases de la langue en les formulant dans le langage formel du calcul des prédicats. Comme tout langage, bien que celui-ci soit artificiel, il possède une syntaxe et une sémantique. C'est ce que vont présenter les sections qui suivent, d'abord informellement (§ 2.2.1 et 2.3.1) puis de façon plus rigoureuse (§ 2.2.2 et 2.3.3).

2.2.1 Les éléments du langage formel

2.2.1.1 Prédicats

Comme son nom l'indique, le langage du calcul des prédicats repose fondamentalement sur la notion de... **prédicat**. Dans la perspective que nous adoptons ici, qui va consister à traduire (ou transcrire) le sens de phrases du français dans un langage formel (LO), les prédicats seront les symboles par lesquels on traduira les *verbes*, les *noms communs* (substantifs), les *adjectifs*. On utilisera souvent aussi les prédicats pour traduire directement les tournures attributives de la forme « *être Adj* » et « *être* (*un*) *N* ». Voici quelques exemples de matériaux linguistiques qui seront traduits par des prédicats :

(9)	... est gentil	... dort
	... est un canard	... a faim
	... est (un) acteur	... fume
	... est ventru	... aime ...
	... est italien	... connaît ...
	... est le frère de ...	... embrasse ...

D'un point de vue plus général, les prédicats seront définis ici comme ces symboles qui correspondent à des *propriétés* ou des *relations*. Et le propre d'une propriété est d'être *attribuée* à quelque chose, de même qu'une relation *porte sur* des choses. Plus généralement, un prédicat est censé *concerner*, *porter sur* ou encore *s'appliquer à* une ou plusieurs choses. Et ces choses sont ce que l'on appelle les **arguments** du prédicat. Cela transparaît déjà dans la formulation des exemples (9)

[16]La déclaration, presque provocatrice, de Montague que l'on cite souvent à cet égard est :

> *Il n'y a selon moi aucune différence théorique importante entre les langues naturelles et les langages artificiels des logiciens* (Montague, 1970b).

Voir aussi (Bach, 1989, pp. 6–7).

[17]Voir notamment Montague (1970a,b, 1973).

via les points de suspensions : en fait les arguments des prédicats sont « ce qui manque » en (9).

Définition 2.3 (Argument)
On appelle **argument** d'un prédicat ce à quoi s'applique ou ce que concerne le prédicat.

Il apparaît clairement de par la série (9), que la notion d'argument est (à peu de chose près) le pendant sémantique de la notion syntaxique de *complément* (en y incluant le sujet). Et on constate ainsi que la langue naturelle, le français, nous invite à envisager des prédicats qui attendent un argument (*est gentil*, *dort*, etc), pour traduire certains noms et les verbes ou GV intransitifs, et des prédicats qui attendent deux arguments (*aime*, *est le frère de*, etc), pour traduire des constructions transitives. On pourra même considérer des prédicats à trois arguments (*... préfère ... à ...*), voire à quatre (*... vend ... à ... pour ...*) ou plus...

Définition 2.4 (Arité)
On appelle **arité**[18] d'un prédicat le nombre d'arguments qu'il prend. Ainsi, si un prédicat attend n arguments, on dit que son arité est n ; on dit aussi que le prédicat est n-aire[19], ou encore qu'il s'agit d'un prédicat à n places.
Un prédicat donné a une et une seule arité ; l'arité est une caractéristique déterminante des prédicats.

Notation 2.1 (Prédicats)
Dans LO, un prédicat est représenté par un symbole, dit *symbole de prédicat*, et ses arguments sont indiqués à sa suite entre parenthèses[20], séparés par des virgules s'il y en a plusieurs.
Par convention, les symboles de prédicats seront écrits en **gras**. Et, toujours par convention, on utilisera des mots ou des abréviations de mots de la langue pour représenter ces symboles dans LO.

Voici par exemple comment l'on peut traduire dans LO les expressions de (9) – pour l'instant je n'y représente pas explicitement les arguments, à la place je note, provisoirement, un espace vide, ␣, à l'endroit qui leur est réservé :

(9)′	**gentil**(␣)	**dormir**(␣)
	canard(␣)	**avoir-faim**(␣)
	acteur(␣)	**fumer**(␣)
	ventru(␣)	**aimer**(␣, ␣)
	italien(␣)	**connaître**(␣, ␣)
	frère-de(␣, ␣)	**embrasser**(␣, ␣)

[18] On trouve également le terme de *valence* pour désigner cette propriété.

[19] En particulier, pour $n = 1$ on prononcera *unaire*, pour $n = 2$ *binaire*, pour $n = 3$ *ternaire*, etc.

[20] Il s'agit donc d'une notation de type *fonctionnelle* ; cf. § ??, p. ??. D'ailleurs le terme d'argument se retrouve dans le vocabulaire mathématique concernant les fonctions – ce n'est pas un hasard.

Les symboles de prédicats en (9)′ sont dénommés par des mots du français, mots qui reprennent ceux des expressions de (9). Mais ce n'est là qu'une simple commodité. Pour écrire ces prédicats dans LO, on aurait pu choisir d'emprunter des mots de l'anglais ou du latin, etc., ou même d'utiliser des symboles abstraits comme par exemple G_3, D_1, C_{14}, F_7, A, $\heartsuit$, etc. Cela ne ferait fondamentalement aucune différence. Le choix des noms de symboles pour transcrire les prédicats est complètement *conventionnel* et *arbitraire*. Et c'est simplement pour des raisons pratiques, de transparence et de facilité de lecture, que l'on choisira ici de reprendre des mots du français pour écrire les symboles de prédicats. Il est alors très important de bien faire la distinction entre le (symbole de) prédicat **aimer** (que l'on peut écrire aussi **aimer**(␣, ␣)) et le verbe transitif *aimer*. Car le premier appartient au langage objet LO, alors que le second appartient à la langue naturelle qu'est le français[21]. Pour conclure cette remarque, il faut bien être conscient que, malgré les apparences, ce n'est pas le nom du symbole de prédicat qui porte en soi la sémantique du prédicat qu'il représente, cette sémantique est définie par ailleurs (en § 2.3 *infra*).

La définition 2.4 pose qu'un prédicat donné a une arité fixe. On postule également qu'un prédicat donné de LO a un et un seul sens. Cela a pour conséquence de multiplier le nombre de prédicats susceptibles de traduire un mot donné du français. Par exemple (9)′ donne le prédicat **fumer** (à un argument) pour traduire le verbe intransitif *fumer*, mais *fumer* a aussi un emploi transitif (comme dans « *fumer un cigare* ») qui devra se traduire par un prédicat binaire. Même si ces deux verbes *fumer* sont sémantiquement reliés, on ne pourra pas les traduire par le même prédicat **fumer**, car il doit avoir une arité fixe. C'est pourquoi lorsque l'on a besoin de refléter dans LO la polyvalence ou la polysémie d'un mot du français, on peut adopter une notation qui décore les symboles de prédicat d'indices numériques pour distinguer les différentes acceptions. Ainsi on pourra écrire $\mathbf{fumer_1}$(␣) pour traduire le verbe intransitif (signifiant être un fumeur), $\mathbf{fumer_2}$(␣, ␣) pour le verbe transitif (brûler du tabac en aspirant la fumée), et pourquoi pas $\mathbf{fumer_3}$(␣) pour le sens de dégager de la fumée (« la cheminée fume ») etc. Les indices n'ont aucune signification en soi, ils servent juste à poser des distinctions dans les noms de symboles de prédicats.

2.2.1.2 Constantes d'individus

Les prédicats sont des symboles de LO ; le terme d'argument, quant à lui, ne désigne pas une catégorie de symboles mais plutôt un *rôle* que certains symboles peuvent jouer vis à vis des prédicats. Nous devons maintenant voir quels sont les éléments du langage objet qui peuvent jouer ce rôle. Les exemples précédents nous ont montré que, au moins dans certains cas, les arguments correspondent à des expressions qui dénotent des choses, des personnes, des objets au sens large, ce que l'on regroupe ici sous l'appellation d'**individus**. Dans LO, ces expressions s'appellent

[21] Remarquez que, par conséquent, rien ne nous empêcherait formellement de traduire dans LO par exemple l'adjectif français *gentil* par le symbole de prédicat **méchant** ou par le symbole **manchot** ou encore $\mathbf{schtroumpf_{257}}$... Cela ne poserait aucun problème théorique ; seulement, dans la pratique, nos notations deviendraient alors bêtement obscures.

des **termes**[22]. Il existe deux grands types de termes, et le premier que nous allons regarder est celui des **constantes d'individus**.

Les constantes d'individus sont l'équivalent dans LO des *noms propres* de la langue naturelle. Ainsi, comme un nom propre, un constante désigne directement un individu du monde, à ceci près que nos constantes n'auront pas l'ambiguïté que peuvent avoir certains noms propres comme *Pierre Dupont*, *John Smith* ou *Nathalie Lebrun*, etc. Par définition, chaque constante d'individu a une dénotation unique, et c'est pour cela qu'on l'appelle une constante.

Notation 2.2 (Constantes d'individus)
Dans LO, les constantes d'individus seront notées par des lettres minuscules, prises plutôt au début de l'alphabet[23], et éventuellement complétées par des indices numériques. Elles seront également écrites en **gras**.

Par exemple si l'on souhaite parler des individus suivants : Joey, Chandler, Monica, Phoebe, Rachel, Ross, on pourra les désigner respectivement par les constantes $\mathbf{j}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$. Là encore, le choix des lettres est complètement arbitraire : il se trouve que c'est pratique de reprendre les initiales des prénoms traduits sous formes de constantes, mais on aurait pu tout aussi bien prendre $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$, $\mathbf{a_5}$, $\mathbf{a_6}$.

Remarquez aussi que notre convention d'écriture n'est pas innocente : les constantes d'individus seront notées comme les prédicats, en caractères gras, car en fait les prédicats sont considérés eux aussi comme des constantes ; et on parle alors de constantes prédicatives (ou constantes de prédicats) par opposition aux constantes d'individus. Ces deux types de constantes (c'est-à-dire tout ce que nous écrirons en gras dans LO) sont regroupés sous le terme de **constantes non logiques**[24].

Avec ces premiers éléments de LO, on peut déjà commencer à traduire quelques phrases simples du français (la flèche $\rightsquigarrow$ servira à indiquer les traductions du français vers le langage objet). Il suffit pour cela de placer des constantes dans les positions argumentales de prédicats :

(10)
a. Joey a faim $\rightsquigarrow$ $\mathbf{avoir\text{-}faim}(\mathbf{j})$
b. Joey est acteur $\rightsquigarrow$ $\mathbf{acteur}(\mathbf{j})$
c. Chandler fume $\rightsquigarrow$ $\mathbf{fumer}(\mathbf{c})$
d. Ross aime Rachel $\rightsquigarrow$ $\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1})$

Lorsque l'on fournit des arguments à un prédicat, on dit alors que l'on sature le prédicat, et on obtient une expression qui peut être vraie ou fausse. De telles expressions, qui ont donc bien le type de dénotation des phrases déclaratives, s'appellent des **formules**. Les formules sont les « phrases » de LO.

[22] Ne confondons pas termes et individus : les termes sont des symboles de LO, les individus sont les objets du monde.

[23] Les lettres de la fin de l'alphabet, u, v, w, x, y, z, seront réservées à un autre usage.

[24] Constantes non logiques, car il existe encore d'autres constantes, qui sont les constantes logiques et qui comprennent notamment les symboles de connecteurs et de quantification que nous allons voir en § 2.2.1.3 et § 2.2.1.4.

2.2.1.3 Connecteurs logiques

Certes, pour l'instant, les formules que nous pouvons écrire dans LO sont un peu rudimentaires. Pour gagner en sophistication nous avons besoin d'augmenter notre vocabulaire. Une manière d'obtenir des formules plus complexes est de *combiner* entre elles des formules simples. La manière la plus basique de procéder à ces combinaisons utilise des **connecteurs logiques**. Les connecteurs sont en quelque sorte le pendant en LO des conjonctions de coordination d'une langue comme le français. Mais il sera dès à présent prudent de ne pas trop pousser la comparaison. Car d'une part les connecteurs de LO ne « coordonnent » que des formules, c'est-à-dire des phrases. Et d'autre part, toutes les conjonctions du français ne se traduisent pas forcément par un connecteur logique[25].

Définition 2.5 (Connecteur logique)
Un connecteur logique est un symbole de LO qui permet d'assembler deux formules pour former une nouvelle formule.
Une formule est dite complexe si elle est construite à l'aide d'un ou plusieurs connecteurs.

Les connecteurs que nous allons utiliser dans LO sont au nombre de quatre. Le premier s'appelle la **conjonction**, il sera noté par le symbole $\wedge$ et il traduit la conjonction de coordination *et* du français. On l'appelle d'ailleurs aussi le « et logique », car la conjonction est ce connecteur qui permet de construire une formule (ou phrase) qui sera vraie si et seulement si les formules qu'il connecte sont toutes deux vraies.

Le second connecteur est la **disjonction**, il est noté par le symbole $\vee$ et traduit la conjonction française *ou*. C'est donc le « ou logique », et il construit une formule qui est vraie si au moins l'une des deux formules qu'il connecte est vraie.

Le troisième connecteur est l'**implication** dite **matérielle**. Il traduit notamment la relation de condition que l'on exprime en français avec des structures en *si..., alors...* ou simplement *si..., ...* On le note par le symbole $\rightarrow$. Attention : $\rightarrow$ ne se place pas « au même endroit » que *si* en français ; en LO, on place $\rightarrow$ entre deux formules.

Enfin le dernier est l'**équivalence** dite aussi **matérielle**. Il correspond à l'expression française *si et seulement si*, et se note par $\leftrightarrow$ (et on comprend pourquoi ce connecteur est parfois appelé aussi la *bi-implication*). Ce connecteur semble plus approprié pour traduire des énoncés de type mathématique que pour rendre compte de la sémantique de la langue naturelle, dans la mesure où la tournure *si et seulement si* est assez marginale dans le discours courant. Mais nous le retenons malgré tout dans le jeu de nos connecteurs car il sera utile pour formaliser certains éléments de sémantique du français.

Voyons maintenant quelques exemples de phrases que nous pouvons transcrire dans LO au moyen de connecteurs :

[25] Nous reviendrons plus en détail sur l'explication de ce point en § 2.4.1.

(11) a. Ross aime Rachel et Chandler aime Monica.
$\rightsquigarrow$ $[\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{c}, \mathbf{m})]$
b. Si Chandler a faim, il (Chandler) fume.
$\rightsquigarrow$ $[\mathbf{avoir\text{-}faim}(\mathbf{c}) \rightarrow \mathbf{fumer}(\mathbf{c})]$

Notez l'usage des crochets [ ] que nous avons introduit au passage pour parenthéser chaque connexion de formules. Ces crochets sont d'une grande utilité lorsqu'une formule complexe comprend plusieurs connecteurs, exactement comme en mathématiques les parenthèses sont importantes pour marquer la priorité d'une opération sur une autre ($(4+1) \times 2 \neq 4 + (1 \times 2)$).

La finalité du langage objet est de nous permettre d'expliciter le sens des énoncés, et pas seulement de refléter leur construction syntaxique ou grammaticale. C'est pourquoi les connecteurs vont également nous servir à faire des traductions analytiques comme en (12).

(12) a. Joey est un acteur italien.
$\rightsquigarrow$ $[\mathbf{acteur}(\mathbf{j}) \wedge \mathbf{italien}(\mathbf{j})]$
b. Ross et Rachel s'aiment.
$\rightsquigarrow$ $[\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_1}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2})]$

En effet, la phrase (12a) par exemple nous dit bien conjointement deux choses : que l'individu nommé Joey est acteur *et* qu'il est italien. De même (12b) dit que Ross aime Rachel et que Rachel aime Ross. Notons que (12b) est en fait ambiguë : Ross et Rachel peuvent s'aimer soi-même sans s'aimer l'un l'autre. Dans ce cas on traduira la phrase par $[\mathbf{aimer}(\mathbf{r_2}, \mathbf{r_2}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_1})]$. Cela illustre que LO fait bien son travail d'explicitation du sens des phrases : si une phrase a plusieurs sens, elle reçoit différentes traductions en LO.

Enfin pour compléter au moins minimalement l'expressivité de LO, nous allons avoir besoin de pouvoir traduire des phrases négatives, c'est-à-dire de *nier* des propos ou, plus précisément, des formules. On fabrique des formules négatives dans LO grâce à l'opérateur de **négation** que nous avons déjà vu et qui se note par le symbole $\neg$. Il ne s'agit plus à proprement parler d'un *connecteur* logique : il ne connecte rien, on le place devant une formule pour former sa négation. Mais comme les connecteurs présentés *supra*, la négation « agit » sur des formules et sa contribution sémantique est aussi définie en termes de valeurs de vérité : la négation est cet opérateur qui rend vraies les formules fausses et fausses les formules vraies.

(13) a. Phoebe n'a pas faim.
$\rightsquigarrow$ $\neg\mathbf{avoir\text{-}faim}(\mathbf{p})$
b. Si Chandler dort, il ne fume pas.
$\rightsquigarrow$ $[\mathbf{dormir}(\mathbf{c}) \rightarrow \neg\mathbf{fumer}(\mathbf{c})]$

2.2.1.4 Variables et quantificateurs

Jusqu'ici, dans LO pour parler des individus, de ces choses sur lesquelles on fait porter les prédicats, nous ne disposons que des constantes d'individus, qui rappelons-le sont en quelque sorte les noms propres du langage objet. Or, on s'en doute bien, on peut difficilement se permettre de donner un nom propre à tout individu du monde que l'on souhaiterait évoquer dans des énoncés. Ce ne serait pas très réaliste, car rappelons aussi que nous comptons également les objets inanimés parmi ce que nous appelons ici les individus. Même si certains objets reçoivent les honneurs de l'onomastique (comme par exemple la Tour Effeil, le TGV, Saturne, Durandal, Deep Blue, etc.), la pratique n'est pas courante et surtout absolument pas indispensable. En effet, la langue nous permet d'évoquer des individus, y compris des êtres humains ou animaux, *sans* mentionner leur nom. Soit que l'on ne le connaît pas, soit que l'on n'a pas envie ou pas besoin de faire mention du nom de l'individu en question. On utilise à cet effet des procédés linguistiques évidemment bien connus : c'est l'usage que l'on fait des syntagmes nominaux, comme par exemple *le voisin d'en face*, *un employé de banque*, *les pains au lait*, etc. Et nous devons donc nous donner les moyens dans LO de faire référence aux individus de façon similaire.

Pour ce faire, nous avons d'abord besoin d'un autre type de termes, les **variables**. Comme les constantes, les variables dénotent des individus. Mais alors qu'une constante donnée dénotera toujours le même individu précis, par un lien conventionnel et permanent, une variable permettra de désigner tout et n'importe quoi, sans contrainte particulière *a priori*. D'où leur nom, variables, car ce qu'elles désignent peut varier librement *a priori*. « *A priori* » signifie que si ce que désigne une variable est contraint dans une phrase, ce n'est pas la variable en soi qui pose cette contrainte. Ou pour dire encore les choses autrement, on sait qu'une variable est censée dénoter quelque chose, mais on ne sait pas quoi, du moins pas systématiquement. C'est pourquoi les variables de LO fonctionnent un peu comme les pronoms personnels de la langue naturelle (et plus précisément les pronoms de troisième personne, *il*, *elle*, *le*, *la*, *lui*, etc.).

Notation 2.3 (Variables)
Dans LO, les variables seront notées par des lettres, de préférence minuscules, en italiques, prises à la fin de l'alphabet : principalement x, y, z, mais aussi parfois u, v, w. Elles pourront être éventuellement complétées d'indices numériques : x_1, x_2, x_3, y_1..., ou de « primes » : x', x''...

Voici alors une manière simple de traduire dans LO une phrase française contenant un pronom personnel[26] :

(14) Il dort. $\rightsquigarrow$ **dormir**(x)

[26] Notez cependant que contrairement aux pronoms du français, les variables de LO ne portent pas le trait grammatical de genre.

Cependant les variables ne vont pas être utilisées seulement pour traduire les pronoms de la langue dans LO. Elles nous servent à établir des références anonymes aux choses dont on veut parler. Mais pour compenser le manque d'information dû à cet anonymat, nous avons besoin de d'apporter d'autres éléments qui vont contraindre et discipliner la référence des variables. Pour ce faire on utilise des prédicats (comme en (14)), mais aussi des opérateurs logiques particuliers qui imposent aux variables un « mode de variation » précis. Ce sont les **quantificateurs**, qu'on appelle aussi (plus précisément d'ailleurs) les **symboles de quantification**. Les deux quantificateurs de la logique classique (sur laquelle est fondé LO) sont :

– le **quantificateur existentiel**, noté $\exists$, qui impose à une variable de dénoter *au moins un individu* ; ainsi $\exists x$... se lit « il existe un x tel que... » ;
– le **quantificateur universel**, noté $\forall$, qui impose à une variable de dénoter *successivement tous les individus* ; ainsi $\forall x$... se lit « quel que soit x... » ou « pour tout x... ».

Voyons tout de suite des exemples :

(15) a. $\exists x\, \mathbf{acteur}(x)$ ⇜ il existe un x (ie un individu ou une chose quelconque) qui est un acteur ou tel que x est un acteur ⇜ il existe un acteur, ou il y a un acteur.
b. $\exists x\, [\mathbf{acteur}(x) \wedge \mathbf{fume}(x)]$ ⇜ il existe un x qui est un acteur et qui fume ⇜ un acteur fume.
c. $\exists x\, [\mathbf{acteur}(x) \wedge \mathbf{conna\hat{i}tre}(\mathbf{m}, x)]$ ⇜ Monica connaît un acteur.
d. $\exists x\, \mathbf{aime}(x, \mathbf{p})$ ⇜ (il y a quelqu'un qui) quelqu'un aime Phoebe.

(16) a. $\forall x\, \mathbf{avoir\text{-}faim}(x)$ ⇜ quel que soit x, x a faim ⇜ tout le monde à faim.
b. $\forall x\, [\mathbf{acteur}(x) \rightarrow \mathbf{fume}(x)]$ ⇜ quel que soit x, si x est un acteur, alors x fume ⇜ tous les acteurs fument.

Remarquons cependant que (16)a n'est pas une traduction très rigoureuse de « *tout le monde à faim* », car en français *tout le monde* ne concerne que les êtres humains. Pour un bonne traduction, il faut employer un prédicat signifiant « être humain », par exemple **humain**, et écrire $\forall x[\mathbf{humain}(x) \rightarrow \mathbf{avoir\text{-}faim}(x)]$.

2.2.2 La syntaxe du langage formel

Nous allons à présent faire la synthèse que ce que nous venons de voir sur le langage formel LO en définissant précisément ce langage. En particulier nous devons définir précisément comment les éléments vus précédemment s'organisent au sein du langage. Commençons par en redonner la liste, ils forment le *vocabulaire* de notre langage, ses atomes, sa matière première.

Définition 2.6 (Vocabulaire)
Le vocabulaire de LO comporte :
– un ensemble de variables : $\{x\ ;\ y\ ;\ z\ ;\ x_1\ ;\ x_2\ ;\ \ldots\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ \ldots\}$;
– un ensemble de constantes d'individus : $\{\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{b}\ ;\ \mathbf{c}\ ;\ \mathbf{d}\ ;\ \ldots\ ;\ \mathbf{a_1}\ ;\ \mathbf{a_2}\ ;\ \mathbf{a_3}\ ;\ \ldots\ ;\ \mathbf{b_1}\ ;\ \mathbf{b_2}\ ;\ \ldots\}$;

– un ensemble de constantes de prédicats : {**acteur** ; **gentil** ; **dormir** ; **canard** ; **aimer** ; **connaître** ; ...} ;
– un ensemble de symboles logiques : $\{\neg ; \wedge ; \vee ; \rightarrow ; \leftrightarrow ; = ; \forall ; \exists\}$;
– les crochets [ ] et les parenthèses ( ).

Notons que nous avons ajouté le symbole = parmi les symboles logiques ; il servira à représenter l'identité, c'est-à-dire l'égalité de dénotation.

En principe, les ensembles de variables et de constantes d'individus et de prédicats sont supposés être finis (ce qui est bien raisonnable, on ne va pas manipuler un langage au vocabulaire infini) et être présentés exhaustivement, ce que masque l'usage des points de suspension dans la définition ci-dessus. La tradition « montagovienne »[27] a l'habitude (depuis les travaux de Montague lui-même) de proposer des *fragments* de langage, c'est-à-dire des sous-parties (très) petites *mais complètes* de ce que serait un langage objet réaliste de l'envergure d'une langue naturelle. Procéder par fragments constitue une méthodologie de travail très rigoureuse car tout y est complètement et précisément défini, aucun élément du langage ne risque de rester dans l'ombre ou le vague. Je ne compte pas ici m'autoriser une quelconque mollesse ou désinvolture dans la méthode de travail, simplement, pour des raisons de clarté et de commodité, je me permettrai d'utiliser des ensembles de constantes et de variables « ouverts », c'est-à-dire suffisamment grands pour permettre de la variété dans les exemples de phrases traduites en LO. Autant que faire se peut, chaque nouveau prédicat introduit dont la sémantique ne serait pas immédiate sera explicitement commenté.

Un autre élément d'information attaché au vocabulaire et qui n'apparaît pas dans la définition 2.6 doit être précisé : nous faisons l'hypothèse que pour chaque constante de prédicat nous connaissons son arité, et qu'elle est unique. Cela veut dire que l'ensemble de symboles de prédicat est en fait partionné en plusieurs sous-ensembles (celui des prédicats unaires, celui des prédicats binaires etc.) et que l'on connaît cette partition. Cette hypothèse est importante et précieuse, car dans nos notations rien ne nous indique formellement le nombre d'arguments qu'attend un prédicat[28].

Nous allons également en profiter pour définir tout de suite la notion de *terme*, qui va nous être utile par la suite. Il s'agit juste de regrouper sous une même appellation les variables et les constantes.

Définition 2.7 (Termes)
Les variables et les constantes d'individus sont des **termes**.

Définir un langage, au sens des langages formels, consiste à indiquer, d'une manière ou d'une autre, toutes les séquences correctes qu'admet ce langage. Et bien entendu, la manière que l'on retient consiste à spécifier l'ensemble des règles qui permettent de construire n'importe quelle séquence admissible, c'est-à-dire la *syntaxe* du langage. On reconnaît là, naturellement, la démarche de la grammaire

[27] *Montagovien* signifie relatif à Montague ou à ses travaux.
[28] Nous verrons comment perfectionner tout cela au chapitre 5.

générative, sauf que nous n'allons pas ici exprimer les règles syntaxiques sous formes de règles de réécriture comme dans la tradition chomskienne par exemple, mais par ce que l'on appelle la méthode inductive. Définir une syntaxe par induction consiste à spécifier des règles (ou des « recettes ») qui indiquent comment construire récursivement des formules de plus en plus complexes à partir de formules plus simples que l'on sait déjà construire.

La définition 2.8 présente la syntaxe de LO, et c'est en fait ni plus ni moins que la définition détaillée et complète de ce qu'est une formule de LO. Dans ces règles, j'utilise des lettres grecques, α, β, γ, φ, ψ, ainsi que P pour désigner des expressions plus ou moins quelconques de LO. Ces symboles en soi ne font pas partie de LO (tous les symboles de LO sont donnés par le vocabulaire 2.6), ce sont des sortes de macro-symboles ou méta-symboles qui nous permettent de dire des choses générales sur LO. Ainsi, en toute rigueur, on ne devrait pas dire que φ est une formule, mais que φ représente une formule (cependant, par la suite, nous nous autoriserons quelque liberté de langage en qualifiant φ de formule).

Définition 2.8 (Syntaxe)

(Syn.1)
 a. Si α est un terme et P un symbole de prédicat à une place, alors $P(\alpha)$ est une formule ;
 b. Si α et β sont des termes et P un symbole de prédicat à deux places, alors $P(\alpha,\beta)$ est une formule ;
 c. Si α, β et γ sont des termes et P un symbole de prédicat à trois places, alors $P(\alpha,\beta,\gamma)$ est une formule ;
 d. etc.

(Syn.2) Si α et β sont des termes, alors $\alpha = \beta$ est une formule ;

(Syn.3) Si φ est une formule, alors $\neg\varphi$ est une formule ;

(Syn.4) Si φ et ψ sont des formules, alors $[\varphi \wedge \psi], [\varphi \vee \psi], [\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\varphi \leftrightarrow \psi]$ sont des formules ;

(Syn.5) Si φ est une formule et v une variable, alors $\forall v\varphi$ et $\exists v\varphi$ sont des formules.

Il convient ensuite de conclure cet ensemble de règles par une dernière règle de « clôture » qui dit ceci : rien d'autre que ce qui peut être construit en un nombre fini d'étapes par les règles de (Syn.1) à (Syn.5) n'est une formule. Cela permet de garantir que notre syntaxe définit bien *toutes* les formules de LO.

Les règles (Syn.1) sont celles qui permettent de construire les formules les plus simples (dites atomiques) en fournissant aux symboles de prédicat des arguments en quantité nécessaire. La règle (Syn.2) construit aussi des formules simples, qui pose une identité entre deux termes ; en fait le symbole $=$ pourrait tout aussi bien être rangé parmi les prédicats binaires (on devrait alors plutôt écrire $=(\alpha,\beta)$) et (Syn.2) ne présente qu'une variante particulière de ce que recouvre (Syn.1b) ; simplement on préfère utiliser la notation habituelle, plus claire et naturelle, pour le symbole $=$. Les règles (Syn.3) et (Syn.4) introduisent les connecteurs logiques dans la construction des formules ; rappelons que (pour le moment) les crochets [ ] sont indispensables dans (Syn.4). Enfin la (double) règle (Syn.5) introduit les symboles de quantification ; notons que cette règle autorise d'accoler une séquence quantificateur–variable devant n'importe qu'elle formule φ, c'est-à-dire qu'on n'a pas à vérifier si la variable v figure ou non dans φ (nous y reviendrons *infra*).

Illustrons à présent le fonctionnement de notre syntaxe avec un exemple. La syntaxe indique comment construire correctement des formules et en même temps comment reconnaître si des séquences de symboles du vocabulaire de LO sont ou non des formules bien formées (ce que l'on appelle aussi des expressions bien formées ou EBF). Essayons donc de montrer que (17) est bien formée.

(17) $\exists x \forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$

Pour vérifier la bonne formation de (17), il suffit de la reconstruire en appliquant les règles de la syntaxe, et seulement elles, qui sont nécessaires. On peut également déconstruire la formule en appliquant les règles syntaxiques, mais dans l'autre sens, jusqu'à ce que l'on n'obtienne que des éléments du vocabulaire de base. Voici les étapes de construction de (17) :

– **aimer** est un prédicat à deux places, **c** est une constante et x est une variable, donc $\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x)$ est une formule bien formée en vertu de la règle Syn.1b ;
– de même, **gentil** est un prédicat à une place et y est une variable, donc $\mathbf{gentil}(y)$ est une formule bien formée, en vertu de la règle Syn.1a ;
– donc en vertu de la règle Syn.4, avec le connecteur $\wedge$, $[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ est une formule bien formée ;
– donc, comme y est une variable, $\forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ est une formule bien formée, en vertu de la règle Syn.5 pour $\forall$;
– et donc, comme x est une variable, $\exists x \forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \mathbf{gentil}(y)]$ est une formule bien formée, en vertu de la règle Syn.5 pour $\exists$. *qed.*

On peut illustrer graphiquement une telle démonstration à l'aide de ce qu'on appelle l'**arbre de construction** d'une formule. L'arbre de (17) est donné en Figure 2.1.

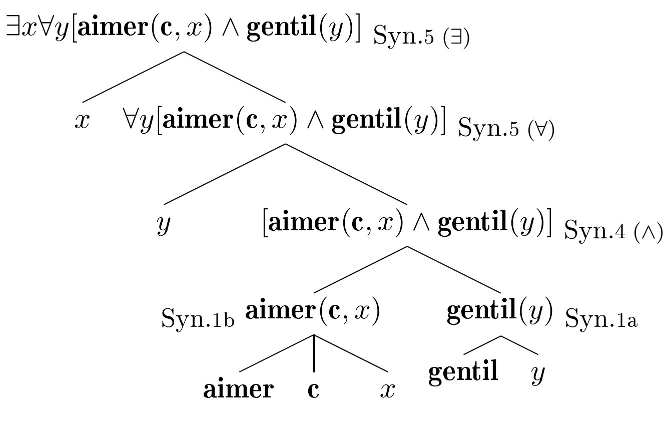

FIG. 2.1 – Arbre de construction de (17)

Chaque nœud de l'arbre représente une étape de la construction de la formule, la racine (ou nœud supérieur) correspondant à la formule complète. Chaque branche et embranchement représente l'application d'une règle syntaxique, et les nœuds directement inférieurs dans un embranchement représentent les « ingrédients » à partir desquels on construit ce qui est dans le nœud directement supérieur.

Il y a un théorème qui dit que toute formule bien formée est représentable par un et un seul arbre de construction. Donc pour montrer qu'une séquence donnée est une formule bien formée, il suffit de dessiner son arbre de construction. Et si on n'y parvient pas, c'est que la séquence n'est pas une formule bien formée[29]. Ainsi on peut montrer que (18) n'est pas bien formée, car son arbre de construction complet (Figure 2.2) n'est pas possible.

(18) $\neg\mathbf{aimer}(\mathbf{b}x)$

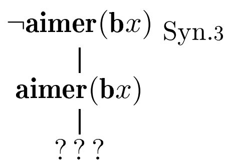

Fig. 2.2 – Echec de la construction de (18)

Aucune règle de la syntaxe ne permet de construire $\mathbf{aimer}(\mathbf{b}x)$; celle qui s'en rapprocherait le plus serait (Syn.1b), mais elle exige de placer une virgule entre deux arguments d'un prédicat binaire.

En revanche, (19) est parfaitement bien formée (comme le prouve l'arbre en Figure 2.3), même si elle semble un peu bizarre ; mais cela n'est (et ne doit) être qu'une impression, car (19) ne pose aucun problème pour le système du calcul des prédicats[30].

(19) $\exists y\, \mathbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

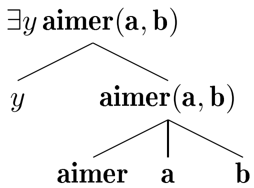

Fig. 2.3 – Arbre de construction de (19)

[29] Ou bien qu'on s'est trompé dans l'analyse !

[30] Nous verrons, en examinant la sémantique de LO, que cette formule est en fait équivalente à $\mathbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Le concept d'arbre de construction d'une formule permet de définir facilement une notion qui sera très utile par la suite, celle de **sous-formule** d'une formule. Une sous-formule est tout simplement une formule bien formée que l'on trouve à l'intérieur d'une formule plus grande.

Définition 2.9 (Sous-formule)
On dit que ψ est une **sous-formule** de la formule φ si et seulement si ψ est une formule qui apparaît dans l'arbre de construction de φ.

Ainsi $\textbf{aimer}(\mathbf{c}, x)$, $\textbf{gentil}(y)$, $[\textbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \textbf{gentil}(y)]$ et $\forall y[\textbf{aimer}(\mathbf{c}, x) \wedge \textbf{gentil}(y)]$ sont des sous-formules de (17), mais pas $\exists x \forall y\, \textbf{aimer}(\mathbf{c}, x)$.

Exercice 2.1
Parmi les séquences suivantes, lesquelles sont des formules correctes de LO ?

1. $\exists z\, [[\textbf{connaître}(\mathbf{r_2}, z) \wedge \textbf{gentil}(z)] \wedge \neg \textbf{dormir}(z)]$
2. $\exists x \forall y \exists z\, [\textbf{aimer}(y, z) \vee \textbf{aimer}(z, x)]$
3. $\forall xy\, \textbf{aimer}(x, y)$
4. $\neg\neg \textbf{aimer}(\mathbf{r_1}, \mathbf{m})$
5. $\exists x \neg \exists z\, \textbf{connaître}(x, z)$
6. $\exists x[\textbf{acteur}(x) \wedge \textbf{dormir}(x) \vee \textbf{avoir-faim}(x)]$
7. $[\textbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \neg \textbf{aimer}(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$
8. $\exists y[\textbf{acteur}(x) \wedge \textbf{dormir}(x)]$

Exercice 2.2
Traduisez dans LO les phrases françaises ci-dessous. Vous choisirez les noms de prédicats et de constantes comme cela vous arrange, mais vous indiquerez à chaque fois ce qu'ils traduisent du français. Si une phrase contient une présupposition, ne traduisez que son contenu asserté (ie non présupposé). On ne tiendra pas compte de valeur sémantique des temps verbaux (on les néglige pour l'instant).

1. Antoine n'est plus barbu.
2. Tout est sucré ou salé.
3. Soit tout est sucré, soit tout est salé.
4. Le chien qui aboie ne mord pas. (proverbe)
5. C'est Marie que Jérôme a embrassé.
6. Il y a des hommes et des femmes qui ne sont pas unijambistes.
7. Tout le monde aime quelqu'un.
8. Si tous les homards sont gauchers alors Alfred aussi est gaucher.
9. Quelqu'un a envoyé une lettre anonyme à Anne.
10. Seule Chloé est réveillée.

Exercice 2.3
Même exercice.

1. Il existe des éléphants roses.
2. Quelque chose me gratouille et me chatouille.
3. Quelque chose me gratouille et quelque chose me chatouille.
4. Nimes est entre Avignon et Montpellier.
5. S'il y a des perroquets ventriloques, alors Jacko en est un.
6. Anne a reçu une lettre de Jean, mais elle n'a rien reçu de Pierre.
7. Tout fermier qui possède un âne est riche.
8. Il y a quelqu'un qui a acheté une batterie et qui est en train d'en jouer.
9. Il y a un seul océan.
10. Personne n'aime personne.

Récapitulons. La syntaxe présentée ici nous permet de faire le tri entre ce qui est une formule correcte de LO et ce qui est une simple séquence écrite n'importe comment avec les éléments du vocabulaire. Les formules correctes, reconnues ou admises par la syntaxe, sont souvent appelées des expressions bien formées (EBF), par opposition à des expressions qui seraient mal formées. Cette discrimination entre expressions bien formées et mal formées n'est pas purement normative ou arbitraire. N'oublions pas que nous sommes en sémantique ; et le but du jeu n'est pas simplement de dire que telle expression est bien écrite et que telle autre ne l'est pas. Ici, la syntaxe anticipe sur la sémantique, car ce que la syntaxe reconnaît comme expressions bien formées sont en fait des expressions qui ont du sens (ie des expressions que l'on peut interpréter). On les appellera alors des **expressions interprétables** (trad. de *meaningful expressions*). Donc si une expression bien formée est une expression qui a un sens, une expression mal formée est une expression à laquelle on ne peut pas (ou on ne saurait pas) attribuer un sens. Remarquons que cela a des implications importantes : qu'une expression mal formée soit non interprétable, cela ne pose guère de problème ; en revanche, ce qui est moins évident, c'est que toute expression que l'on s'autorisera à manipuler dans LO (c'est-à-dire qu'on acceptera comme bien formée) devra obligatoirement être clairement et systématiquement interprétable ; de plus, tout ce que l'on souhaitera interpréter dans notre théorie devra recevoir une écriture (bien formée) dans LO.

Nous allons maintenant voir ce qu'est le sens d'une expression de LO, c'est-à-dire la sémantique de ce langage.

2.3 Interprétation dans le calcul des prédicats

2.3.1 Sémantique informelle

Le sens est ce qui nous permet de trouver la dénotation d'une expression. Donc décrire le sens des expressions revient à spécifier les règles de calcul des dénotations des expressions. La finalité de l'analyse sémantique ici est principalement d'exprimer les conditions de dénotation des formules (leurs conditions de vérité), et comme les formules peuvent être plus ou moins complexes, construites à partir d'éléments plus simples, nous devons d'abord avoir une idée précise de ce que sont les dénotations de ces éléments, c'est-à-dire les expressions de base du langage LO.

Par définition, la dénotation d'une constante d'individu est simplement l'individu (du monde) désigné par cette constante. Par exemple si nous nous intéressons à un individu, humain de sexe masculin, nommé Chandler Bing, etc. nous pourrons choisir de lui faire correspondre le symbole de constante **c** de LO. Et donc nous saurons ainsi que **c** dénote cet individu particulier.

Venons-en à la dénotation des prédicats et d'abord des prédicats à une place comme **acteur**. Rappelons que la dénotation est en quelque sorte la projection dans le monde de ce que « vaut » l'expression. Le prédicat **acteur** traduit le substantif français *acteur*, il représente le concept abstrait d'être acteur et dans le monde, concrètement, ce concept se réalise par l'ensemble de tous les individus du monde qui sont acteurs. Cet ensemble est la dénotation du prédicat. De manière générale, la dénotation d'un prédicat à une place est l'**ensemble de tous les individus** qui le vérifient, c'est-à-dire qui tombent sous le chef du concept représenté par le prédicat.

Il en va de même pour les prédicats qui traduisent des adjectifs qualificatifs, comme **gentil**, dont la dénotation est l'ensemble de tous les individus gentils, ainsi que des prédicats qui traduisent des verbes intransitifs, comme **dormir**, qui dénote l'ensemble de tous les individus qui sont en train de dormir dans le monde.

Faisons ici deux remarques importantes. D'abord parler d'ensembles tels que l'ensemble de *tous* les acteurs peut paraître contre-intuitif et peu naturel, car ces ensembles sont immenses et personne ne peut prétendre sérieusement connaître complètement l'ensemble de tous les acteurs du monde. C'est vrai, mais en fait cela ne pose aucun problème pour la théorie. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin, mais disons pour l'instant que savoir que la dénotation du prédicat **acteur** est l'ensemble de tous les acteurs ce n'est pas la même chose que savoir exhaustivement et précisément qui sont les individus qui appartiennent à cette dénotation. Dans la théorie sémantique, ce qui va compter c'est ce premier savoir, bien plus que le second.

Ensuite, les dénotations présentées ici sous forme d'ensembles sont celles de prédicats qui traduisent des termes *singuliers* du français : *acteur*, *gentil*, *dort*, et non pas *acteurs*, *gentils*, *dorment*. On pourrait penser que lorsque l'on dit quelque chose comme « *Joey est acteur* » ou simplement « *cet acteur* », il n'est question que d'un seul individu et pas d'un ensemble d'acteurs. Mais dans ces expressions, le caractère singulier de la dénotation n'est pas porté par le prédicat lui-même, mais d'une certaine manière, il est imposé par un autre élément de la phrase, comme la structure syntaxique ou un déterminant[31]. En soi et pris isolément, un prédicat comme **acteur** n'a aucune raison de distinguer un acteur parmi d'autres, puisqu'il ne fait que présenter le concept ou la propriété d'être acteur.

On peut se convaincre de cela en s'interrogeant sur la dénotation d'une formule, car nous avons à présent en main ce qu'il nous faut pour effectuer le calcul de la

[31]Pour le moment, nous laissons de côté l'analyse sémantique des pluriels ; cela sera abordé plus précisément dans le chapitre 9.

valeur de vérité d'une formule simple comme (20), qui traduit la phrase « Joey est acteur ».

(20) $\mathbf{acteur}(\mathbf{j})$

j dénote un individu (celui qui s'appelle Joey dans le cas de figure que nous examinons ici) et **acteur** dénote un ensemble d'individus (les acteurs). Maintenant dans quels cas (20) est-elle vraie ? Simplement si l'individu dénoté par **j** appartient à l'ensemble dénoté par **acteur**. Et cela n'est rien d'autre que la condition de vérité de (20). La « rencontre » dénotationnelle du prédicat et de son argument, qui donne la dénotation de la formule, se fait par la relation d'appartenance (le $\in$ de la théorie des ensembles) entre un objet et un ensemble d'objets.

La dénotation d'un prédicat binaire, comme **aimer** ou **frère-de**, est un peu plus complexe, mais poursuit le même genre de formalisation. Un tel prédicat exprime une relation qui se joue entre deux individus ; sa dénotation ne peut donc pas être directement un ensemble d'individus où chacun vérifie un concept indépendemment de ses « compagnons d'ensemble ». Il faut pouvoir rendre compte du fait que, par exemple, Ross peut être le frère de Monica mais pas de Chandler, et aussi que Monica n'est pas le frère de Ross.

Par conséquent, la dénotation d'un prédicat binaire est un ensemble dans lequel des individus sont explicitement mis en relation avec d'autres. Un moyen technique d'indiquer une mise en relation est d'utiliser des listes ou ce qu'on appelle des ***n*-uplets** ; un n-uplet est une liste qui contient exactement n objets. Un n-uplet ou une liste est une manière de représenter mathématiquement une collection d'objets, mais c'est très différent d'un ensemble, car dans un n-uplet les objets qu'il contient sont présentés dans un *ordre* précis et déterminant, alors que la notion d'ordre n'a aucune pertinence à l'intérieur d'un ensemble ; de même un objet donné peut apparaître plusieurs fois dans un n-uplet, c'est-à-dire y occupper plusieurs positions, alors qu'un objet appartient une fois pour toutes à un ensemble.

Pour expliciter une relation binaire, on utilisera des n-uplets à deux éléments, ce qu'on appelle des **couples**[32]. Ainsi la dénotation d'un prédicat binaire est un **ensemble de couples d'individus**, tous les couples tels que leur premier membre vérifie vis-à-vis de leur second membre la relation exprimée par le prédicat. Par exemple, on peut supposer que la dénotation de **frère-de** contiendra, entre autres, le couple composé de Ross et de Monica, mais pas le couple composé de Monica et de Ross (les couples sont ordonnés), qui lui pourra appartenir à la dénotation de **sœur-de**.

Et le calcul de la dénotation d'une formule comme (21) reste fondamentalement le même, sauf qu'on l'applique à des couples et des ensembles de couples.

(21) $\mathbf{frère\text{-}de}(\mathbf{r_2}, \mathbf{m})$

[32] *Couple* ici est un terme technique. Si on veut, c'est la manière normale de prononcer 2-uplet en français. N'y cherchons pas la connotation que l'on retrouve avec des couples mariés ou des couples d'amoureux. Notons en passant qu'en français, un *ensemble* à deux éléments s'appelle une **paire**.

(21) est vraie si le couple constitué de la dénotation de $\mathbf{r_2}$ et de celle de **m** appartient à la dénotation de **frère-de**, qui est l'ensemble de tous les couples frère–sœur ou frère-frère du monde. Remarque : si un individu a plusieurs sœurs, mettons trois, alors il apparaîtra en tête de trois couples différents dans la dénotation de **frère-de**, un couple pour chaque sœur.

On peu maintenant généraliser : la dénotation d'un prédicat à n arguments (avec $n \geq 2$) est un ensemble de n-uplets d'individus. Pour un prédicat ternaire, on parlera d'ensembles de triplets, pour un prédicat quaternaire, d'ensembles de quadruplets, etc.

Nous allons voir maintenant comment représenter précisément (c'est-à-dire formellement) ce système de dénotations au moyen de l'outil mathématique que sont les modèles.

2.3.2 Les modèles

Nous avons vu que la dénotation de la plupart des expressions interprétables n'est pas absolue : elle *dépend* d'un certain nombre de circonstances, de cas de figure, bref de *comment est le monde*. Par exemple, pour que **acteur**(**j**) soit vraie, il faut que Joey soit effectivement un acteur dans le monde qu'on envisage. C'est peut-être le cas, ça peut ne pas l'être. Les choses sont ce qu'elles sont, mais elles pourraient être autrement ; et de toute façon, personne ne sait tout sur tout.

En fait si la dénotation d'une expression dépend d'un certain état du monde, c'est qu'il ne convient pas de parler de dénotation seule, et dorénavant on prendra soin d'envisager la dénotation d'une expression toujours *relativement* à une certaine configuration du monde.

Nous avons donc besoin de tenir compte de cette « certaine configuration du monde ». Cela veut dire que nous allons devoir nous donner un moyen de *représenter* suffisamment précisément le monde et son « état ». Pour ce faire, l'outil que nous allons utiliser est celui des **modèles**.

Un modèle est une figuration mathématique du monde ; c'est une représentation **ensembliste** et **structurée**. Dans sa version la plus simple, la notion de modèle nous fournit ce que l'on peut vraiment appeler une image du monde, au sens d'un cliché ou d'un instantané. Et pour des raisons avant tout pratiques, les modèles que l'on examinera de près ne constituent que des images *partielles* du monde, comme les photographies qui ne restituent nécessairement que de minuscules portions de la réalité. Mais qu'un modèle décrive fidèlement, scrupuleusement et donc démesurément le monde ou qu'il ne donne qu'une image partielle, les caractéristiques définitoires qui le sous-tendent restent exactement les mêmes. Les modèles partiels, souvent minuscules, que nous verrons en exemples par la suite, je les appellerai des « modèles-jouets » ; un véritable modèle quant à lui est un objet plutôt théorique et est supposé décrire *complètement* le monde.

Qu'est-ce qui fait que le monde, ou *un* monde, est tel qu'il est et pas autrement ? Ce qui le caractérise c'est tout d'abord l'ensemble des choses, c'est-à-dire des individus, qui le peuplent. Un monde dans lequel existe King-Kong est assurément différent du monde dans lequel existent les lecteurs de ces pages. Un modèle indique ce genre d'information en définissant un **domaine** – ce que l'on appelle aussi un **univers**[33]. Le domaine d'un modèle donné est un *ensemble d'individus*, l'ensemble de tous les individus qui appartiennent au monde que décrit ce modèle.

Remarquons qu'une façon de se donner des modèles partiels est de les définir sur de petits domaines, qui ne comportent que très peu d'individus. On dira alors qu'ils ne contiennent que les individus qui nous intéressent dans notre modélisation du monde, que les individus dont on est susceptible de parler dans un contexte de discours particulier.

Voici un exemple de (petit) domaine d'individus – appelons-le $\mathcal{A}$:

(22) $\mathcal{A} = \{$MonicaG ; PhoebeB ; RachelG ; ChandlerB ; JoeyT ; RossG$\}$[34]

Ce que contient l'ensemble $\mathcal{A}$, en tant que domaine, ce sont des individus, et pas des noms. Il se trouve que les individus de cet exemple sont des personnes, mais on aurait pu aussi faire figurer des objets ou des animaux dans $\mathcal{A}$.

Notation 2.4
Pour bien marquer la distinction entre les mots ou noms de la langue et les individus qui appartiennent à la réalité décrite dans un modèle, ces derniers seront représentés à l'aide d'une police de caractères spéciale, en Petites Capitales.

Il faudra donc bien veiller à ne pas confondre le prénom *Joey*, qui appartient à la langue naturelle (le français ou l'anglais), la constante **j** qui appartient au langage objet LO, et l'individu JoeyT qui appartient au modèle. Il serait probablement plus pédagogique de présenter un dessin ou une photo de l'individu au lieu de la séquence JoeyT pour bien montrer qu'il s'agit là d'une portion de réalité. Mais cette stratégie, qui deviendrait vite graphiquement encombrante, ne resterait somme toute qu'un moyen terme tout aussi artificiel. Accommodons-nous plutôt des contraintes matérielles imposées par un ouvrage écrit en faisant usage de la convention de notation typographique 2.4.

Donc un modèle établit une description (éventuellement partielle) du monde en spécifiant un domaine d'individus, la « population » du monde. Un domaine n'est qu'un ensemble, dans lequel les individus nous sont présentés en vrac. Une description du monde ne se ramène pas qu'à cela ; cela se doit d'être plus sophistiqué, plus informatif. C'est pour cela que j'ai dit plus haut qu'un modèle est *structuré*. Les individus du domaine sont organisés d'une certaine manière, et cette « certaine manière » n'est ni plus ni moins qu'un certain état du monde. Le modèle spécifie une telle organisation en indiquant « qui est qui », « qui est quoi » et « qui fait quoi » dans le domaine.

[33]Les appellations complètes et plus précise que l'on trouve souvent sont **domaine** ou **univers de quantification**, ou encore **domaine** ou **univers d'interprétation**.

[34]On utilise la notation mathématique habituelle qui représente le contenu d'un ensemble encadré d'accolades $\{\,\}$, ses éléments séparés par des points-virgules.

En d'autres termes, un modèle décrit l'état du monde en explicitant le lien entre le domaine et le langage (en l'occurrence LO). Ce lien est en fait la dénotation du vocabulaire. En effet, savoir dans quel état est le monde, ou savoir ce qui se passe dans le monde, cela revient finalement à connaître les dénotations de tous les prédicats du langage, puisque les prédicats servent à donner, dans le langage, des informations sur le monde[35].

Illustrons cela en reprenant « notre histoire » introduite via les exemples (9)–(13). Un modèle qui décrit fidèlement la réalité d'un monde devra par exemple nous dire qui est italien parmi les individus du domaine, autrement dit quel est l'ensemble des italiens,... autrement dit quelle est dénotation du prédicat **italien**. Et de même, il devra nous dire qui est une femme, qui est un homme, qui est acteur, qui fume, qui dort, etc. Mais aussi qui aime qui, qui connaît qui, qui embrasse qui, qui est le frère de qui, etc. Bref, on attend d'un modèle qu'il réponde à ce genre de question pour tout prédicat du langage.

Par exemple, notre modèle en cours pourra nous faire savoir que (23a) est la dénotation de **italien**, (23b) celle de **acteur**, (23c) celle de **femme**, (23d) celle de **homme**, etc. Ces ensembles sont forcément des sous-ensembles de $\mathcal{A}$.

(23) a. {JoeyT}
b. {JoeyT}
c. {MonicaG ; PhoebeB ; RachelG}
d. {JoeyT ; ChandlerB ; RossG}

Dans ce mini-modèle, **italien** et **acteur** ont la même dénotation, mais c'est justement parce que le modèle est très petit. Cela ne tire donc pas vraiment à conséquence.

Pour les prédicats n-aires, nous représenterons les n-uplets en les encadrant de chevrons $\langle\,\rangle$ en séparant leurs membres par des virgules. Par exemple : ⟨RossG, RachelG⟩ est un couple d'individus. Le modèle pourra ainsi nous dire que (24a) est la dénotation de **aimer** et (24b) celle de **frère-de**.

(24) a. {⟨RachelG, RossG⟩ ; ⟨RossG, RachelG⟩ ; ⟨MonicaG, ChandlerB⟩ ; ⟨ChandlerB, MonicaG⟩}
b. {⟨RossG, MonicaG⟩}

Ce que nous devons voir pour terminer, c'est comment le modèle nous fournit ces réponses. On utilise à cet effet un outil formel simple : une **fonction** qui à chaque constante non logique de LO associe sa dénotation dans le modèle. Une telle fonction s'appelle une **fonction d'interprétation**, et elle est, au côté du domaine, un élément constitutif du modèle. Notons-la F. Un début de description (possible) du monde apparaîtra alors comme ci-dessous ; de manière générale, on représentera

[35] Notez que l'on pourrait connaître certaines informations sur le monde qui soient indicibles ; elles ne correspondraient donc à la dénotation d'aucun prédicat. Cela est tout à fait concevable (encore que les langues naturelles ont un pouvoir expressif immense). Mais comme nous étudions ici la sémantique de la langue, nous ne nous intéresserons qu'aux informations « dicibles ».

graphiquement une fonction sous forme de « matrice » à deux colonnes, la première correspondant à l'ensemble de départ de la fonction, la seconde à son ensemble d'arrivée et chaque élément de l'ensemble de départ est mis en regard de son image par une flèche ($\mapsto$).

$$F : \begin{bmatrix} \textbf{italien} & \longmapsto \{\textsc{JoeyT}\} \\ \textbf{acteur} & \longmapsto \{\textsc{JoeyT}\} \\ \textbf{femme} & \longmapsto \{\textsc{MonicaG} ; \textsc{PhoebeB} ; \textsc{RachelG}\} \\ \textbf{homme} & \longmapsto \{\textsc{JoeyT} ; \textsc{ChandlerB} ; \textsc{RossG}\} \\ \textbf{fumer} & \longmapsto \{\textsc{ChandlerB}\} \\ \textbf{aimer} & \longmapsto \{\langle \textsc{RachelG}, \textsc{RossG}\rangle ; \langle \textsc{RossG}, \textsc{RachelG}\rangle ; \\ & \quad \langle \textsc{MonicaG}, \textsc{ChandlerB}\rangle ; \\ & \quad \langle \textsc{ChandlerB}, \textsc{MonicaG}\rangle\} \\ \textbf{frère-de} & \longmapsto \{\langle \textsc{RossG}, \textsc{MonicaG}\rangle\} \\ \text{etc.} & \end{bmatrix}$$

On peut également expliciter F avec la notation fonctionnelle habituelle, en écrivant par exemple : $F(\textbf{italien}) = \{\textsc{JoeyT}\}$, $F(\textbf{femme}) = \{\textsc{MonicaG} ; \textsc{PhoebeB} ; \textsc{RachelG}\}$, etc.

Le modèle nous dit aussi « qui est qui ». Cela signifie que la fonction d'interprétation indique également à quel individu du domaine correspond chaque constante d'individu du langage. Donc F doit être complétée par les attributions suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} \longmapsto \textsc{MonicaG} \\ \mathbf{p} \longmapsto \textsc{PhoebeB} \\ \mathbf{r_1} \longmapsto \textsc{RachelG} \\ \mathbf{c} \longmapsto \textsc{ChandlerB} \\ \mathbf{j} \longmapsto \textsc{JoeyT} \\ \mathbf{r_2} \longmapsto \textsc{RossG} \end{bmatrix}$$

Résumons par la définition suivante :

Définition 2.10 (Modèle)
Un **modèle** (simple) d'interprétation sémantique d'un langage LO est défini par un couple $\langle \mathcal{A}, F\rangle$ où $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide et F une fonction qui projette les constantes non logiques (ie d'individus et de prédicats) de LO dans $\mathcal{A}$.
Si $\mathcal{M}$ est le nom du modèle, on pose $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F\rangle$ en guise définition.
On dit que $\mathcal{A}$ est le **domaine** de $\mathcal{M}$ et on le tient pour l'ensemble de tous les individus du monde décrit par $\mathcal{M}$.
F s'appelle la **fonction d'interprétation** de LO dans $\mathcal{M}$.

2.3.3 Les règles sémantiques

Nous pouvons maintenant définir la sémantique du langage LO, c'est-à-dire ses règles d'interprétation. Comme nous le savons maintenant, il s'agit de règles de calcul, et plus précisément du calcul de la dénotation de toute expression de LO. Pour exprimer ces calculs, introduisons d'abord un élément de notation.

Notation 2.5 (Valeur sémantique)
Soit α une expression interprétable quelconque (de LO).
$[\![\alpha]\!]$ représente la **valeur sémantique** de l'expression α. On l'appelle également l'**interprétation** de α.

Nous allons nous servir de cette notation pour représenter la dénotation des expressions. La dénotation est, comme il se doit, la valeur sémantique relativisée à un certain modèle.

Notation 2.6 (Dénotation)
Soit α une expression interprétable quelconque (de LO) et $\mathcal{M}$ un modèle.
$[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}$ représente la **dénotation** de α *relativement* au modèle $\mathcal{M}$.

Remarque : $[\![\,]\!]$ est une notation symbolique, mais elle n'appartient pas au langage LO ; là encore c'est un méta-symbole que les sémanticiens utilisent pour parler de la sémantique d'une expression.

Pour décrire le sens dans LO, nous devons définir la valeur sémantique de *toute* expression interprétable relativement à *tout* modèle possible. Pour ce faire, il suffit d'exprimer les règles de calcul par rapport à un modèle absolument quelconque, c'est-à-dire complètement général ; on est sûr ainsi qu'elles vaudront pour n'importe quel modèle. Comme l'ensemble des expressions de LO est déterminé par les règles de syntaxe, le plus efficace est de reprendre chacune de ces règles et de lui associer une règle d'interprétation sémantique. Ainsi on aura la garantie d'avoir défini une sémantique pour toutes les expressions possibles de LO.

Commençons d'abord par définir l'interprétation du « lexique » de base de LO, c'est-à-dire les constantes d'individus et de prédicats. Nous l'avons vu, la valeur sémantique de ces constantes nous est directement donnée par la fonction d'interprétation F du modèle par rapport auquel on a choisi d'effectuer le calcul.

Définition 2.11 (Interprétation des constantes non logiques)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

1. Si α est une constante d'individu, alors $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}} = F(\alpha)$; ie l'individu de $\mathcal{A}$ assigné à a par F.
2. Si P est une constante de prédicat, alors $[\![P]\!]^{\mathcal{M}} = F(P)$; ie un ensemble d'individus de $\mathcal{A}$ si P est unaire, un ensemble de couples d'individus de $\mathcal{A}$ si P est binaire, etc.

Ensuite nous devons spécifier comment obtenir la dénotation de n'importe quelle formule construite par la syntaxe. Les règles d'interprétation sont récursives (comme celles de la syntaxe) et compositionnelles car l'interprétation de toute formule est définie via l'interprétation de ses constituants. Comme la dénotation d'une formule est une valeur de vérité, nous allons devoir manipuler le vrai et le faux, et nous le ferons au moyen des symboles suivants :

Notation 2.7 (Valeurs de vérité)
On note $\{0 ; 1\}$ l'ensemble des valeurs de vérité. 1 représente « vrai » et 0 représente « faux »[36].
Ainsi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ signifie que φ est vraie par rapport au (ou dans le) modèle $\mathcal{M}$, et $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ que φ est fausse par rapport à $\mathcal{M}$.

Définition 2.12 (Interprétation des formules)
Soit un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$.

(Sem.1)
a. Si P est un prédicat à une place et si α est une constante, alors $[\![P(\alpha)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}} \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
b. Si P est un prédicat à deux places et si α et β sont des constantes, alors $[\![P(\alpha, \beta)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\beta]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
c. Si P est un prédicat à trois places et si α, β et γ sont des constantes, alors $[\![P(\alpha, \beta, \gamma)]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $\langle [\![\alpha]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\beta]\!]^{\mathcal{M}}, [\![\gamma]\!]^{\mathcal{M}} \rangle \in [\![P]\!]^{\mathcal{M}}$;
d. etc.

(Sem.2) Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![t_1]\!]^{\mathcal{M}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{M}}$.

(Sem.3) Si φ est une formule, alors $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

(Sem.4) Si φ et ψ sont des formules, alors
a. $[\![[\varphi \wedge \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *et* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
b. $[\![[\varphi \vee \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
c. $[\![[\varphi \rightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$ *ou* $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$.
d. $[\![[\varphi \leftrightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.

Arrêtons-nous là pour le moment et laissons de côté provisoirement l'interprétation des formules quantifiées, nous y reviendrons en temps voulu.

Ces règles nous disent dans quels cas (et seulement quels cas) une formule de telle ou telle structure est vraie. Il s'agit bien de *conditions de vérité*. Et ces règles d'interprétation définissent donc bien le *sens* des formules.

Les règles (Sem.1) ne font que reformuler précisément ce que nous avons vu en § 2.3.1 : la dénotation d'une formule atomique s'obtient en vérifiant l'appartenance ensembliste ($\in$) de la dénotation des arguments (seuls ou en n-uplets) à la dénotation des prédicats. La règle (Sem.2) est assez simple : elle dit que $t_1 = t_2$ est vrai dans $\mathcal{M}$ si et seulement si les dénotations de t_1 et de t_2 sont identiques.

Ce qui est un peu plus nouveau, ce sont les règles (Sem.3) et (Sem.4) qui interprètent le rôle des connecteurs logiques. Mais d'après ce qu'on a vu en § 2.2.1.3, elle sont assez simples à comprendre, sauf peut-être (Sem.4c) que nous commenterons un peu plus en § 2.4.1.

Pour illustrer le fonctionnement de ces règles, regardons un exemple d'application. Une façon de mettre en œuvre les calculs sémantiques consiste à se donner un

[36] 0 et 1 sont eux aussi des méta-symboles. On pourrait à la place utiliser F et V, mais par expérience je trouve que 0 et 1 permettent une lecture plus fluide, ils se distinguent mieux graphiquement (surtout dans les tables de vérité, cf. § 2.4.1). Et puis on a déjà F pour la fonction d'interprétation, évitons autant que possible les homographies.

modèle petit mais détaillé et d'évaluer des formules par rapport à ce modèle. Soit donc le modèle-jouet $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{A}_1, F_1 \rangle$, défini comme suit (on lui met l'indice $_1$ pour montrer que c'est un modèle bien particulier).

$\mathcal{A}_1 = \{$Thésée ; Hippolyta ; Hermia ; Héléna ; Lysandre ; Démétrius ; Egée ; Puck ; Obéron ; Titania ; Bottom$\}$

$F_1(\mathbf{t_1}) = $ Thésée, $F_1(\mathbf{e}) = $ Egée,
$F_1(\mathbf{h_1}) = $ Hippolyta, $F_1(\mathbf{p}) = $ Puck,
$F_1(\mathbf{h_2}) = $ Hermia, $F_1(\mathbf{o}) = $ Obéron,
$F_1(\mathbf{h_3}) = $ Héléna, $F_1(\mathbf{t_2}) = $ Titania,
$F_1(\mathbf{l}) = $ Lysandre, $F_1(\mathbf{b}) = $ Bottom
$F_1(\mathbf{d}) = $ Démétrius,

$F_1(\textbf{elfe}) = \{\text{Obéron ; Titania ; Puck}\}$

$F_1(\textbf{âne}) = \{\text{Bottom}\}$

$F_1(\textbf{farceur}) = \{\text{Thésée ; Obéron ; Titania ; Puck}\}$

$F_1(\textbf{triste}) = \{\text{Héléna}\}$

$$F_1(\textbf{mari-de}) = \left\{\begin{matrix} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta} \rangle \;; \\ \langle \text{Obéron}, \text{Titania} \rangle \end{matrix}\right\}$$

$$F_1(\textbf{père-de}) = \big\{\langle \text{Egée}, \text{Hermia} \rangle\big\}$$

$$F_1(\textbf{aimer}) = \left\{\begin{matrix} \langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta} \rangle \;; \\ \langle \text{Hippolyta}, \text{Thésée} \rangle \;; \\ \langle \text{Lysandre}, \text{Hermia} \rangle \;; \\ \langle \text{Hermia}, \text{Lysandre} \rangle \;; \\ \langle \text{Démétrius}, \text{Hermia} \rangle \;; \\ \langle \text{Héléna}, \text{Démétrius} \rangle \;; \\ \langle \text{Titania}, \text{Bottom} \rangle \end{matrix}\right\}$$

Cette présentation de $\mathcal{M}_1$ implique que nous travaillons présentement sur une petite portion d'un langage de type LO qui ne comprend que les constantes d'individu $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{o}$, $\mathbf{t_2}$, $\mathbf{b}$, et les prédicats **elfe**, **âne**, **farceur**, **triste**, **mari-de**, **père-de** et **aimer**. Ce petit fragment est loin de nous permettre de rédiger en LO un résumé d'une pièce de Shakespeare, mais il nous suffira pour évaluer la vérité d'une bonne variété de formules. Notons aussi que $\mathcal{M}_1$ sous-entend aussi (mais sans équivoque possible) que tous les prédicats sont à un argument sauf **mari-de**, **père-de** et **aimer** qui sont binaires.

Commençons avec une formule très simple ; on peut se demander quelle est la dénotation (25) relativement à $\mathcal{M}_1$:

(25) $\textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})$

c'est-à-dire, que vaut $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}_1}$? La règle (Sem.1b) nous dit que $[\![\textbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi $\langle [\![\mathbf{d}]\!]^{\mathcal{M}_1}, [\![\mathbf{h_2}]\!]^{\mathcal{M}_1} \rangle \in [\![\textbf{aimer}]\!]^{\mathcal{M}_1}$. Or, d'après la règle 1 de l'interprétation des constantes non logiques, $[\![\mathbf{d}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{d})$ c'est-à-dire Démétrius d'après la donnée de $\mathcal{M}_1$, et $[\![\mathbf{h_2}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{h_2}) = $ Hermia. Donc

$\langle [\![\mathbf{d}]\!]^{\mathcal{M}_1}, [\![\mathbf{h_2}]\!]^{\mathcal{M}_1} \rangle = \langle \text{Démétrius}, \text{Hermia} \rangle$. Quant à $[\![\mathbf{aimer}]\!]^{\mathcal{M}_1}$ c'est égal à $F_1(\mathbf{aimer})$, qui vaut l'ensemble de couples donnée plus haut. Et on constate que $\langle \text{Démétrius}, \text{Hermia} \rangle$ fait bien partie de cet ensemble. On donc bien montré que $[\![\mathbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_2})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, (25) est vraie dans $\mathcal{M}_1$.

Essayons avec (26) :

(26) $[\mathbf{triste}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]$

La règle (Sem.4a) nous dit que $[\![[\mathbf{triste}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi $[\![\mathbf{triste}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\mathbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Regardons d'abord $[\![\mathbf{triste}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1}$. $[\![\mathbf{b}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{b}) = \text{Bottom}$ et $[\![\mathbf{triste}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{triste}) = \{\text{Héléna}\}$. Donc évidemment $[\![\mathbf{b}]\!]^{\mathcal{M}_1} \notin [\![\mathbf{triste}]\!]^{\mathcal{M}_1}$ et donc, en vertu de (Sem.1a), on en conclut que $[\![\mathbf{triste}(\mathbf{b})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. On peut s'arrêter là, car la condition demandée par (Sem.4a) n'est pas remplie : il faut que les *deux* sous-formules soient vraies pour que (26) le soit ; si la première est fausse, il est inutile d'évaluer la seconde, on sait que $[\![[\mathbf{triste}(\mathbf{b}) \wedge \mathbf{aimer}(\mathbf{t_2}, \mathbf{b})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$.

Remarquons en passant que ce qui est faux par rapport à $\mathcal{M}_1$, comme $\mathbf{triste}(\mathbf{b})$, c'est ce qui n'est pas donné comme information par $\mathcal{M}_1$.

Regardons une formule négative, (27) :

(27) $\neg[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]$

(Sem.3) dit que $[\![\neg[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ si et seulement si $[\![[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. Calculons donc $[\![[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1}$. (Sem.4b) dit que cette sous-formule est vraie si $[\![\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ou si $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Là on peut gagner du temps en observant $\mathcal{M}_1$ qui nous conseille de regarder d'abord la valeur de $\mathbf{farceur}(\mathbf{p})$. $[\![\mathbf{p}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{p}) = \text{Puck}$ et $[\![\mathbf{farceur}]\!]^{\mathcal{M}_1} = F_1(\mathbf{farceur}) = \{\text{Thésée} ; \text{Obéron} ; \text{Titania} ; \text{Puck}\}$, donc $[\![\mathbf{p}]\!]^{\mathcal{M}_1} \in [\![\mathbf{farceur}]\!]^{\mathcal{M}_1}$, et donc $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Et cela suffit à montrer que $[\![[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, puisque selon (Sem.4b) il suffit que l'un des deux membres d'une disjonction soit vrai pour que l'ensemble soit vrai. Maintenant la règle (Sem.3) – comme toutes les règles d'interprétation – est en « si et seulement si » ; cela veut dire que $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ *et* $[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Par conséquent, $[\![\neg[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$.

Exercice 2.4
Calculer la dénotation relativement à $\mathcal{M}_1$ des formules suivantes :

1. $[\mathbf{p\grave{e}re\text{-}de}(\mathbf{o}, \mathbf{p}) \leftrightarrow \mathbf{elfe}(\mathbf{b})]$
2. $[\neg\, \mathbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_3}) \rightarrow \mathbf{triste}(\mathbf{h_3})]$
3. $\neg[\mathbf{elfe}(\mathbf{p}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]$
4. $[\mathbf{farceur}(\mathbf{t_1}) \rightarrow [\mathbf{elfe}(\mathbf{t_1}) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{t_1})]]$

2.4 Un peu de logique

Afin de bien maîtriser la sémantique de LO, il est temps de faire un petit détour vers la logique, car en se fondant sur le calcul des prédicats, LO met surtout en avant les propriétés logiques de la structure sémantique des phrases. Nous allons donc examiner de plus près les connecteurs logiques, ainsi que des notions formelles attachées aux formules de LO, ce qui nous permettra de nous donner des règles d'interprétation assez simples pour les formules quantifiées. Cette section permettra par ailleurs de s'entraîner un peu à l'analyse par conditions de vérité.

2.4.1 Tables de vérité

Les connecteurs logiques ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) de LO sont également appelés des **connecteurs vérifonctionnels**. Cela veut dire que leur dénotation peut être considérée comme une *fonction* à un (pour $\neg$) ou deux (pour les autres) argument(s) pris dans $\{0\ ;\ 1\}$ et qui retourne une valeur de $\{0\ ;\ 1\}$. C'est ce qu'on appelle une **fonction de vérité**. C'est juste une façon mathématique de dire que la valeur de vérité d'une formule construite avec un connecteur dépend simplement de la valeur de vérité de ses sous-formules connectées. Et la définition de ces fonctions nous est donnée dans les règles (Sem.3) et (Sem.4).

On peut expliciter ces règles de manière systématique à l'aide de ce qu'on appelle des **tables de vérité**. Une table de vérité est un tableau qui permet de visualiser très facilement toutes les dénotations que peuvent prendre une formule (ou un schéma de formules) construite avec un connecteur. Le principe est le suivant : les premières colonnes d'une table vont correspondre aux sous-formules connectées ; on y fait figurer toutes les combinaisons de valeurs de vérité qu'elles peuvent prendre (lorsqu'on examine un connecteur binaire, il y a quatre combinaisons possibles) ; et dans la colonne suivante, en face de chaque combinaison de valeurs, on pose la valeur de vérité résultante pour la formule complexe. Les tables de vérité sont aux connecteurs logiques ce que nos vieilles tables de multiplication sont à la multiplication. Le Tableau 2.1 regroupe les tables de vérité des quatre connecteurs logiques de LO.

φ	ψ	$[\varphi \wedge \psi]$	$[\varphi \vee \psi]$	$[\varphi \rightarrow \psi]$	$[\varphi \leftrightarrow \psi]$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

TAB. 2.1 – Tables de vérité des connecteurs logiques de LO

Chaque ligne d'une table est donc une combinaison possible des valeurs de φ et ψ. Par rapport à notre formalisation sémantique, cela veut dire que chaque ligne résume une certaine *catégorie* de modèles : la première ligne représente tous les modèles par rapport auxquels φ et ψ sont toutes deux vraies, la deuxième tous les modèles par rapport auxquels φ est vraie et ψ est fausse, etc. Quand on regarde la dénotation d'une formule construite avec un connecteur binaire, on ne s'intéresse qu'à quatre grandes catégories de modèles.

On peut aussi dresser la table de vérité de la négation, et là on n'a à regarder que deux catégories de modèles : ceux où la formule de départ est vraie et ceux où elle est fausse ; cf. Tableau 2.2.

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

TAB. 2.2 – Table de vérité de la négation

Le principe des tables de vérité permet également de calculer toutes les dénotations possibles de formules complexes, ou plus exactement de schémas généraux de formules, qui comprennent plusieurs connecteurs[37]. Techniquement il suffit d'ajouter des colonnes intermédiaires pour les différentes étapes du calcul et ainsi on obtient progressivement le résultat final en réutilisant les résultats intermédiaires[38]. Ces calculs sont courants en logique, et ici ils peuvent nous être utiles car il y a une règle de logique qui dit que deux formules qui ont la même table de vérité sont logiquement (et sémantiquement) équivalentes, puisque cela veut dire qu'elles sont vraies dans exactement les mêmes modèles.

Regardons par exemple les dénotations de $[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$ puis de $\neg[\varphi \vee \psi]$ données dans le Tableau 2.3.

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

φ	ψ	$[\varphi \vee \psi]$	$\neg[\varphi \vee \psi]$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

TAB. 2.3 – Tables de vérité de $[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$ et de $\neg[\varphi \vee \psi]$

Dans la table de gauche on calcule d'abord les valeurs pour $\neg\varphi$ et $\neg\psi$, en se servant de la table 2.2 de la négation ; puis sur ces deux colonnes on applique les règles de calcul de la conjonction $\wedge$ données dans la table 2.1 et cela nous donne les valeurs pour $[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$. La construction de la table de vérité suit les étapes de la construction syntaxique de la formule. Et donc dans la table de droite, on commence par indiquer les valeurs de $[\varphi \vee \psi]$, et à partir de cette colonne on calcule

[37] Cependant l'outil des tables de vérité n'est opérant que sur les formules qui ne contiennent pas de quantificateurs ni de variable, car alors la variété de modèles à prendre en compte est immense et ne peut pas se résumer à quelques lignes.

[38] Mais attention : il ne faut pas oublier d'énumérer sur les lignes de la table *toutes* les combinaisons possibles de valeurs de vérité pour les sous-formules de base prises en compte. Plus une formule complexe connecte de formules simples différentes, plus elle aura de lignes.

les valeurs de $\neg[\varphi\vee\psi]$. Les colonnes de résultat final des deux tables sont identiques, les deux formules sont logiquement (et sémantiquement) équivalentes. Pour illustrer cela, reprenons l'exemple (27) :

(27) $\neg[\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \vee \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]$

Cette formule peut littéralement traduire la phrase française « il est faux que Puck est un âne ou un farceur » ; en clair, cela signifie la même chose que « Puck n'est ni un âne, ni un farceur », autrement dit « Puck n'est pas un âne et Puck n'est pas un farceur », ce qui se traduit bien en (27)′ :

(27)′ $[\neg\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{p}) \wedge \neg\mathbf{farceur}(\mathbf{p})]$

Cette équivalence logique fait partie de ce qui est connu sont le nom de **lois de Morgan**. Il y en a une seconde qui est que $\neg[\varphi \wedge \psi]$ et $[\neg\varphi \vee \neg\psi]$ sont aussi logiquement équivalentes. On peut l'illustrer avec les exemples suivants : « il est faux que Puck est un âne et un farceur », c'est-à-dire « Puck n'est pas un âne farceur », ce qui veut bien dire « Puck n'est pas un âne ou bien Puck n'est pas farceur ». Les lois de Morgan peuvent donc s'avérer utiles pour comprendre certaines formules ou phrases négatives.

Théorème 2.1 (Lois de Morgan)
Une formule de la forme $\neg[\varphi \wedge \psi]$ et une formule de la forme $[\neg\varphi \vee \neg\psi]$ sont logiquement équivalentes.
Une formule de la forme $\neg[\varphi \vee \psi]$ et une formule de la forme $[\neg\varphi \wedge \neg\psi]$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 2.5

1. Montrez, par la méthode des tables de vérité, que $[[\varphi\wedge\psi]\wedge\chi]$ et $[\varphi\wedge[\psi\wedge\chi]]$ sont logiquement équivalentes. NB : ici les tables auront 8 lignes.
2. De même pour $[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$ et $[\varphi \vee [\psi \vee \chi]]$.
3. Montrez que $[[\varphi \rightarrow \psi] \rightarrow \chi]$ et $[\varphi \rightarrow [\psi \rightarrow \chi]]$ *ne sont pas* logiquement équivalentes.

Les deux équivalences de l'exercice 2.5 disent finalement que par exemple lorsqu'on a deux conjonctions qui « se suivent » dans une formule, peu importe comment on les regroupe, c'est-à-dire comment on place les crochets, la dénotation de la formule reste toujours la même. On dit que la conjonction et la disjonction sont des connecteurs *associatifs* (comme le sont l'addition et la multiplication sur les nombres), et pour cette raison on peut s'autoriser à faire l'économie de ces crochets dans l'écriture des formules : ils n'ont pas d'impact sémantique. Ainsi on pourra écrire de temps en temps $[\varphi\wedge\psi\wedge\chi]$ et $[\varphi\vee\psi\vee\chi]$ à la place des quatre premières formules de l'exercice 2.5. Mais il faut bien garder à l'esprit que $[\varphi\wedge\psi\wedge\chi]$ n'est qu'une commodité d'écriture : en toute rigueur, ce n'est pas une formule bien formée de LO, mais juste un raccourci qui vaut indifféremment pour $[[\varphi\wedge\psi]\wedge\chi]$ ou $[\varphi\wedge[\psi\wedge\chi]]$.

En revanche, comme le montre la troisième partie du même exercice, $[\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \chi]$ n'est pas une écriture autorisée, cette (pseudo-)formule n'a vraiment aucun sens. De même on n'a pas le droit d'écrire $[\varphi \wedge \psi \vee \chi]$.

Il y a une autre règle de suppression des crochets que l'on peut s'accorder pour alléger les écritures de formules. Les crochets servent à regrouper les sous-formules à l'intérieur d'une formule complexe pour éviter toute équivoque et pour bien marquer le « champ d'application » d'un connecteur. Par conséquent lorsqu'une formule (mais pas une sous-formule !) est entièrement encadrée de crochets, ceux-ci ne servent pas à grand chose, car justement cette formule globale n'est connectée à aucune autre. Ainsi il est sémantiquement inoffensif de supprimer les crochets les plus extérieurs d'une formule et on peut écrire $\varphi \rightarrow \psi$ à la place de $[\varphi \rightarrow \psi]$ tant qu'il s'agit d'une formule autonome. Mais attention, cela ne concerne que les crochets complètement extérieurs : on n'a pas le droit de les supprimer dans $\neg[\varphi \wedge \psi]$ ou dans $\exists x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]$ (mais on a le droit d'écrire $\exists x\, \mathbf{elfe}(x) \wedge \exists x\, \mathbf{farceur}(x)$ pour $[\exists x\, \mathbf{elfe}(x) \wedge \exists x\, \mathbf{farceur}(x)]$).

Exercice 2.6
Montrez que les paires de formules suivantes sont chacune logiquement équivalentes :

1. φ et $\neg\neg\varphi$
2. $[\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\neg\varphi \vee \psi]$
3. $[\varphi \rightarrow \psi]$ et $[\neg\psi \rightarrow \neg\varphi]$
4. $[\varphi \rightarrow [\psi \rightarrow \chi]]$ et $[[\varphi \wedge \psi] \rightarrow \chi]$
5. $[\varphi \wedge [\psi \vee \chi]]$ et $[[\varphi \wedge \psi] \vee [\varphi \wedge \chi]]$
6. $[\varphi \vee [\psi \wedge \chi]]$ et $[[\varphi \vee \psi] \wedge [\varphi \vee \chi]]$

Il n'est pas inutile de connaître par cœur ces équivalences (la n° 1 s'appelle d'ailleurs la *loi de la double négation* et la n° 3 la *loi de contraposition*[39]).

2.4.2 Disjonctions inclusive et exclusive

La table de vérité de la disjonction $\vee$, répétée dans le Tableau 2.4, de même que la règle (Sem.4b) nous disent que $[\varphi \vee \psi]$ est vraie si l'une des deux sous-formules est vraie et aussi lorsqu'elles sont vraies toutes deux. C'est ce qu'on appelle la **disjonction inclusive**, et c'est pourquoi elle est parfois prononcée « *et/ou* ». Il existe en logique un autre connecteur disjonctif, qu'on appelle la **disjonction exclusive** ; notons-la par le symbole $\veebar\!\!\vee$[40] ; sa table de vérité est donnée dans le Tableau 2.4.

[39]Un exemple d'équivalence via la double négation est donnée par « *Marie fume* » et « *il est faux que Marie ne fume pas* ». La loi de contraposition peut s'illustrer par « *s'il y a de la fumée, il y a du feu* » et « *s'il n'y a pas de feu, il n'y a pas de fumée* ».

[40]Ce symbole n'est pas spécialement consacré dans la littérature logique. Mais à ma connaissance, il n'y a aucun consensus de notation clairement établi ; on trouve facilement les variantes suivantes : $\veebar$, $\triangledown$, $+$, $\oplus$, $\not\equiv$, etc., ce qui tend à montrer le côté relativement marginal de ce connecteur.

φ	ψ	$[\varphi \vee \psi]$	$[\varphi \veebar \psi]$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

TAB. 2.4 – Tables de vérité des disjonctions inclusive et exclusive

On voit que $[\varphi \veebar \psi]$ est vraie si l'une des deux sous-formules est vraie mais pas les deux en même temps. C'est fromage ou dessert.

Une question importante qu'on a à se poser en sémantique, c'est de savoir si les expressions de la langue qui expriment la disjonction, en français « *ou* », « *ou bien* », « *soit..., soit...* », doivent s'analyser par une disjonction inclusive ou exclusive. On peut deviner la réponse puisque c'est $\vee$ et pas $\veebar$ qui a été introduit dans LO, mais regardons les choses plus précisément.

En fait, il peut sembler que la plupart (ou au moins un grand nombre) des phrases disjonctives du français sont plus naturellement comprises comme exprimant une disjonction exclusive plutôt qu'inclusive. Un exemple classique est (28) :

(28) Alice est dans sa chambre ou dans la salle de bain.

Il paraît assez évident que cette phrase ne suggère pas qu'Alice est peut-être à la fois dans sa chambre et dans la salle de bain. La disjonction en (28) a bien l'air exclusive. Remarquons au passage que, parmi les raisons qui peuvent amener un locuteur à utiliser une disjonction dans son énoncé, l'une des plus courantes est lorsqu'il ne dispose pas d'une information absolument certaine, que pour lui deux possibilités sont en balance. Mais cela ne veut pas dire que ces énoncés ne sont pas informatifs ; ils ne sont pas vagues ; (28) exclut tous les autres endroits où Alice peut être.

Les phrases suivantes fonctionnent de la même manière, en illustrant des disjonctions exclusives :

(29) Ce type, il s'appelle Hubert ou Herbert.

(30) Daniel travaille à Biarritz ou à Bayonne.

(31) Cet été pour les vacances, Adèle est allée en Espagne ou en Italie.

Mais il faut faire une remarque importante ici : ce n'est pas forcément parce que l'on comprend ces phrases comme exprimant une disjonction exclusive ou qu'elles nous semblent exprimer une disjonction exclusive que leur *sens* doit être analysé de la sorte. Nous savons à présent comment décrire le sens d'une phrase : ce sont ses conditions de vérité. Or demandons-nous dans quels cas la phrase (31) est vraie. Elle est vraie bien sûr si Adèle est effectivement allée en Espagne ou si elle est allée en

Italie. Mais qu'en est-il si elle a fait deux voyages pendant ses vacances et qu'elle a visité les deux pays ? Dans ce cas, force est d'admettre que (31) est également vraie. Autrement dit, les conditions de vérité nous donnent clairement une disjonction inclusive. La phrase (32) en est un autre exemple. Imaginez un inspecteur menant une enquête et qui, après avoir recueilli des indices et des témoignages, énonce la conclusion suivante :

(32) Le coupable est roux ou il porte une perruque rousse.

Devra-t-on alors écarter un suspect qui à la fois serait roux et porterait une perruque rousse ? Bien sûr que non. Par conséquent, même si elle n'en a pas l'air, la phrase (32) a une structure sémantique de disjonction inclusive.

On peut cependant faire une double objection : d'abord les disjonctions des phrases (28)–(30) ont l'air « plus » exclusives qu'en (31) et (32), ensuite comment expliquer que malgré tout il y a une lecture exclusive qui se présente nettement lorsqu'on lit tous ces exemples ? Il y a plusieurs manières de répondre à cela.

Une première explication serait d'ordre strictement sémantique et grammaticale. Elle dirait que la conjonction « *ou* » du français[41] est ambiguë : il y aurait deux « *ou* », un inclusif et un exclusif. Ainsi (31) recevrait deux traductions possibles en LO :

(31)′ a. $[\mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{e}) \vee \mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{i})]$
b. $[\mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{e}) \veebar \mathbf{aller}(\mathbf{a}, \mathbf{i})]$

Mais il a été montré (par Gazdar (1979) notamment) que cette analyse est difficilement défendable et on retient préférentiellement des explications plus pragmatiques.

D'abord il ne faut pas manquer d'observer dans les exemples (28) et (29) que, dans le cours normal des choses, les cas où les deux membres de la disjonction sont vrais (Alice est à deux endroits à la fois, le type porte deux prénoms usuels) sont hautement improbables, si ce n'est impossibles ou absurdes. Il s'agit là en fait d'une sorte de *présupposé* de bon sens, quelque chose que le locuteur et l'allocutaire savent ou présument ensembles et tacitement. Et cela se reflète dans les conditions de vérité : savoir si (28) est vraie lorsqu'Alice est dans les deux pièces à la fois est tout simplement sans intérêt, sans pertinence. Et on peut même dire que dans un tel cas, (28) n'est ni vraie ni fausse, mais hors de propos – ce qui est bien une propriété des présuppositions. Si on tient compte de cette présupposition, la disjonction n'a de valeur que pour dire qu'un et un seul des deux membres est vrai, ce qui provoque bien une lecture exclusive. Simplement ce qui fait l'exclusivité de la disjonction n'est pas affirmé par le locuteur mais présupposé, et ce n'est donc pas dans la structure sémantique de sa phrase. En bref, nos phrases ici sont sémantiquement des disjonctions inclusives qui par présupposition reviennent à des

[41] Mais cela se retrouverait probablement dans toutes les langues.

disjonctions exclusives[42].

Il y a une autre explication pragmatique, qui ne s'oppose pas à la première, et selon laquelle les lectures disjonctives exclusives sont des effets d'implicatures conversationnelles. L'idée est la suivante : une conjonction de deux formules $[\varphi \wedge \psi]$ est plus informative, plus précise que la disjonction de ces mêmes formules $[\varphi \vee \psi]$, car la conjonction est vraie dans moins de cas que la disjonction (cf. Tableau 2.1) et car $[\varphi \vee \psi]$ est une conséquence logique de $[\varphi \wedge \psi]$ (quand la conjonction est vraie la disjonction l'est aussi). Par exemple, dire qu'Adèle est allée en Espagne *et* en Italie est évidemment plus précis que de dire qu'elle est allée en Espagne ou en Italie. Par conséquent, si un locuteur énonce la formule la moins informative, c'est qu'il est probable qu'il ne pense pas que la formule la plus informative soit vraie. Autrement dit, une implicature que l'on peut tirer normalement de $[\varphi \vee \psi]$ c'est $\neg[\varphi \wedge \psi]$. Et si on réunit les deux, cela nous donne : φ ou ψ et pas les deux à la fois, ce qui est bien l'interprétation de la disjonction exclusive. Précédemment, l'exclusivité était donnée a priori par une présupposition, ici elle est obtenue a posteriori par une implicature.

Terminons ces observations avec le coup de grâce que nous pouvons porter à une analyse sémantique de la disjonction exclusive. Reprenons l'hypothèse qui suggérait que « *ou* » soit sémantiquement (ie lexicalement) ambigu entre $\vee$ et $\veebar$. Cela veut dire que toute phrase en « *ou* » reçoit deux traductions *plausibles* et qu'éventuellement ensuite l'une des deux soit écartée parce que peu appropriée dans le contexte.

Regardons alors ce qui se passe avec une disjonction multiple, c'est-à-dire à plus de deux membres, comme par exemple (33) :

(33) Marie a prévenu Pierre ou Albert ou Jacques.

Si « *ou* » est ambigu, alors (33) peut se traduire au moins de deux façons :

(33)′ a. $[[\textbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{p}) \vee \textbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{a})] \vee \textbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{j})]$ ou
b. $[[\textbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{p}) \veebar \textbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{a})] \veebar \textbf{prévenir}(\mathbf{m},\mathbf{j})]$

c'est-à-dire les schémas de formules $[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$ ou $[[\varphi \veebar \psi] \veebar \chi]$. Avant même d'analyser ces formules, on peut déjà expliciter les conditions de vérité de (33) simplement en regardant la phrase. On peut y voir effectivement deux lectures, une inclusive et une exclusive. Pour la lecture disjonctive inclusive, (33) est vraie si et seulement si Marie a prévenu *au moins un* des trois garçons – et donc c'est vrai aussi si elle en a prévenu deux ou les trois. Pour la lecture disjonctive exclusive c'est moins simple car il y a deux manières de voir les choses. On pourrait envisager une lecture exclusive faible qui dirait que (33) est vraie ssi Marie a prévenu au moins

[42]Mais attention : il s'agit bien là de présuppositions *pragmatiques*, en ce sens qu'elles constituent des informations évidentes. Le fait qu'on est enclin à présumer qu'une même personne ne peut pas être à la fois dans deux endroits différents est indépendant de la sémantique de la disjonction en français. Il serait donc fautif de considérer ici la conjonction *ou* comme un déclencheur de présupposition.

un des trois garçons mais pas tous les trois – ce serait donc vrai si elle en a prévenu deux. Mais cette interprétation semble peu naturelle et plutôt compliquée. L'autre lecture serait exclusive forte, elle dirait que (33) est vraie ssi Marie a prévenu *un seul* des trois garçons. Examinons maintenant ce que nous disent les tables de vérité de nos deux schémas de formules. Elles sont donnée dans le Tableau 2.5.

φ	ψ	χ	$[\varphi \vee \psi]$	$[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$	$[\varphi \veebar \psi]$	$[[\varphi \veebar \psi] \veebar \chi]$
1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

TAB. 2.5 – Tables de vérité de disjonctions à trois termes

La table de $[[\varphi \vee \psi] \vee \chi]$ est bien conforme à nos attentes. Quant à celle de $[[\varphi \veebar \psi] \veebar \chi]$ elle correspond *presque* à la lecture exclusive forte ; « presque » à cause de la première ligne qui ne donne pas le résultat escompté. Et c'est beaucoup plus grave qu'il n'y paraît car si on recommence l'exercice avec une disjonction à quatre ou cinq membres, on constatera une étonnante régularité : une disjonction exclusive multiple (en $\veebar$) est vraie ssi il y a un *nombre impair* de sous-formules atomiques connectées qui sont vraies. Et cette règle n'a décidément rien à voir avec ce que peut vouloir dire un locuteur qui énonce une phrase disjonctive. Autrement dit, le connecteur $\veebar$ donne des résultats erronés quand il s'agit d'exprimer le sens des phrases du français.

La conclusion de tout cela est que d'un point vue strictement sémantique, c'est-à-dire concernant uniquement les conditions de vérité, l'expression d'une disjonction en français sera toujours traduite par une disjonction inclusive, $\vee$. C'est à un autre niveau de l'analyse (pragmatique) que se manifeste le caractère exclusif de l'interprétation d'une disjonction. Nous n'utiliserons donc pas $\veebar$ dans LO.

2.4.3 Implication matérielle

Le connecteur de l'**implication matérielle**, $\rightarrow$, a été présenté comme étant ce qui permet de traduire en LO les constructions conditionnelles en « si..., (alors)... ». Exemple :

(34) Si Démétrius n'aime pas Héléna, alors elle est (/sera) triste.
$[\neg\, \mathbf{aimer}(\mathbf{d}, \mathbf{h_3}) \rightarrow \mathbf{triste}(\mathbf{h_3})]$

Introduisons d'abord deux éléments de vocabulaire attachés aux implications :

Définition 2.13 (Antécédent et conséquent d'une implication)
Dans une implication de la forme $[\varphi \rightarrow \psi]$, la sous-formule φ s'appelle l'**antécédent** de l'implication, et la sous-formule ψ son **conséquent**.
Par extension on parle aussi de l'antécédent et du conséquent d'une phrase conditionnelle pour désigner respectivement la proposition subordonnée (en *si*) et la principale.

Les conditions de vérité données en (Sem.4c) et la table de vérité, reproduite dans le Tableau 2.6, peuvent paraître un peu éloignées de ce que l'on attend de la sémantique d'une structure conditionnelle du français en « *si* ». Il faut d'abord savoir que la formulation de (Sem.4c) n'est qu'une façon de dire parmi d'autres variantes équivalentes ; on aurait pu tout aussi bien écrire : $[\![[\varphi \rightarrow \psi]]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ si et seulement si, si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ alors $[\![\psi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ aussi. Mais la version (Sem.4c) a le mérite d'être plus analytique et moins alambiquée.

φ	ψ	$[\varphi \rightarrow \psi]$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

TAB. 2.6 – Table de vérité de $\rightarrow$

Ce qui gêne souvent dans la table de vérité de $\rightarrow$, c'est sa troisième ligne : comment le faux peut-il impliquer le vrai ? ou comment de quelque chose de faux peut-on déduire quelque chose de vrai ?

D'abord, il faut bien être avisé du fait que l'implication matérielle n'est pas la même chose que la déduction ; ce sont deux concepts orthogonaux. L'implication matérielle est un symbole de LO qui permet d'écrire des formules ; la déduction est un type de raisonnement, ou éventuellement un jugement que l'on porte sur une forme de raisonnement (on dit par exemple que tel raisonnement est déductif). Une manière d'établir une déduction est d'utiliser la relation de conséquence logique que nous avons vue au chapitre précédent. On la notait par $\models$, et ce symbole ne fait pas partie de LO, c'est un méta-symbole. Il sert à *affirmer* qu'il y a une conséquence logique entre des phrases, et on a bien vu que cette relation ne s'établit pas n'importe comment (nous y reviendrons en § 2.4.5). Au contraire, la règle syntaxique (Syn.4) nous autorise à placer le connecteur $\rightarrow$ entre n'importe quelles formules, pourvu qu'elles soient bien formées. C'est que $[\varphi \rightarrow \psi]$ en soi n'affirme rien, quand on l'écrit on ne dit pas si elle est vraie ou fausse (d'où l'utilité des modèles et de $[\![\,]\!]$). Ainsi on a tout à fait le droit d'écrire $[\varphi \rightarrow \neg\varphi]$ puisque c'est une EBF, alors qu'écrire $P \models \neg P$ c'est commettre une flagrante erreur de logique. Car ces deux écritures ne se situent pas sur le même plan : la première fait partie de LO, le langage objet qu'observent et étudient les sémanticiens, alors que la seconde appartient au métalangage, dans lequel s'expriment les sémanticiens.

Ensuite, on doit remarquer que le faux n'implique pas que le vrai, il implique aussi le faux (cf. la table de vérité). Autrement dit le faux implique n'importe quoi[43] : lorsque l'antécédent d'une implication est faux, la valeur de son conséquent n'est pas discriminante. Ce qui est surtout déterminant, ce sont les deux premières lignes de la table de vérité. Cela peut s'illustrer avec l'exemple suivant :

(35) Si je pars de chez moi après 8h, je rate mon train.

C'est une phrase que je peux énoncer très raisonnablement si je dois prendre un train qui part à 8h20 et que je sais pertinemment qu'il me faut au minimum 20 minutes pour aller à la gare[44]. Maintenant imaginons que finalement je suis parti à 7h40 et que malgré tout, à cause d'une panne de métro ou d'un embouteillage, j'ai quand-même raté mon train (c'est-à-dire on imagine un modèle où les chose se sont passées ainsi). Ainsi l'antécédent de (35) est faux et son conséquent est vrai. Doit-on alors en conclure que dans ce cas (35) est fausse ? Pas du tout, elle reste vraie, simplement parce qu'elle ne se prononce pas sur ce qui se passe dans le cas où je pars avant 8h (ie lorsque l'antécédent est faux).

Il faut tout de même mentionner un effet de sens qui se produit assez souvent avec des phrases conditionnelles, et qui là encore est d'ordre pragmatique. Prenons l'exemple de parents qui disent à leurs enfants :

(36) Si vous êtes sages, on ira au parc d'attraction cet après-midi.

Cet énoncé est une sorte de promesse. Et comme précédemment, plaçons-nous dans une situation où l'antécédent est faux et le conséquent vrai : les enfants n'ont pas été sages du tout et les parents les ont emmenés au parc. Dans ce cas, on ne peut pas vraiment dire qu'ils n'ont pas tenu leur promesse, techniquement ils ne se sont pas parjurés (ça aurait été le cas si les enfants ayant été sages ils ne soient pas emmenés au parc). En revanche, on peut estimer que les parents sapent ainsi dangereusement leur autorité et leur crédibilité. La raison en est que, comme l'a montré, entre autres, Ducrot (1984), une affirmation de la forme de (36) s'accompagne habituellement d'un *sous-entendu* (et donc probablement d'une implicature conversationnelle) de la forme de (37) :

(37) Si vous n'êtes pas sages, on n'ira pas au parc d'attraction cet après-midi.

C'est pourquoi une phrase comme (36) se comprend souvent comme exprimant une équivalence matérielle ($\leftrightarrow$) plutôt qu'une implication, car l'affirmation (36) ($[\varphi \rightarrow \psi]$) complétée du sous-entendu (37) ($[\neg\varphi \rightarrow \neg\psi]$) revient à « on ira au parc d'attraction, si et seulement si vous êtes sages ». Cet effet d'équivalence, comme l'effet d'exclusivité pour la disjonction, est le fruit d'un raisonnement pragmatique[45],

[43] C'est même une loi logique fameuse et depuis longtemps identifiée sous le joli nom de *e falso sequitur quodlibet* (du faux s'ensuit n'importe quoi, ou le faux implique tout).

[44] Pour les besoins de la démonstration, on fait aussi l'hypothèse extravagante que les trains partent toujours à l'heure.

[45] Très informellement, ce raisonnement peut se résumer ainsi : si les parents énoncent (36) tout en envisageant la possibilité d'emmener les enfants au parc quoi qu'il arrive, alors ça ne sert à rien de mettre une condition à la promesse, car dans ce cas, il leur suffirait de dire simplement : « on ira au parc cet après-midi ».

mais il n'est pas inscrit dans la structure sémantique de la phrase de départ (36).

Pour conclure sur l'implication matérielle, disons qu'il faut toujours penser à évaluer *globalement* la dénotation d'une phrase conditionnelle. Une implication ou une conditionnelle met en place une hypothèse exprimée par l'antécédent qui, seulement si elle est vraie, nous invite à examiner (ie à vérifier) une conséquence, c'est-à-dire le conséquent. Si l'hypothèse est fausse, alors globalement l'implication n'a rien à signaler et donc elle est – trivialement – vraie. L'hypothèse, donc l'antécédent, a le statut de **condition suffisante** dans l'implication. C'est pourquoi on peut s'aider à bien interpréter une phrase conditionnelle en prononçant l'implication par « *il suffit que* »[46] (mais surtout pas « *il faut que* » !), comme par exemple (36)′ qui est une bonne variante logique de (36).

(36)′ Il suffit que vous soyez sages pour que nous allions au parc d'attraction cet après-midi.

2.4.4 La quantification

Il est temps de revenir aux formules quantifiées de LO et à leur sémantique. Pour cela, il nous faut examiner quelques propriétés formelles et quelques notions attachées aux formules qui comportent des symboles de quantification. La plus fondamentale est celle de **portée**.

Définition 2.14 (Portée d'un quantificateur)
Si une formule φ contient une sous-formule de la forme $\exists v\psi$ ou $\forall v\psi$, on dit que ψ est la **portée** respectivement du quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$ dans φ.

Regardons tout de suite un exemple (volontairement compliqué, et laissons de côté ce que la formule peut bien signifier) :

(38) $\neg\exists x\exists y[\forall z[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \rightarrow \mathbf{aimer}(y,z)] \wedge \mathbf{aimer}(x,y)]$

En (38), la portée de $\exists w$ est $\mathbf{aimer}(z,w)$, celle de $\forall z$ est $[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \rightarrow \mathbf{aimer}(y,z)]$, celle de $\exists y$ est $[\forall z[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \rightarrow \mathbf{aimer}(y,z)] \wedge \mathbf{aimer}(x,y)]$ et celle de $\exists x$ est $\exists y[\forall z[\exists w\,\mathbf{aimer}(z,w) \rightarrow \mathbf{aimer}(y,z)] \wedge \mathbf{aimer}(x,y)]$.

La portée d'un quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$ est simplement la sous-formule (complète !) qui le suit immédiatemment dans la formule globale, ou, si l'on préfère, la sous-formule qu'on a utilisée en appliquant la règle (Syn.5) au moment d'introduire $\exists v$ ou $\forall v$ lors de la construction de la formule globale.

Remarquez qu'ici on appelle *quantificateur* une séquence composée d'un symbole de quantification suivi d'une variable. A ce propos, la formulation de la définition 2.14 est un peu simplifiée ; pour être tout à fait précis il faut en fait l'énoncer en disant : « ... on dit que ψ est la portée *de cette occurrence particulière* du quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$, respectivement, dans φ ». En effet, rien n'empêche d'avoir

[46] C'est-à-dire que $[\varphi \rightarrow \psi]$ peut se prononcer en « *si* φ, ψ » ou « *il suffit que* φ *pour que* ψ ».

plusieurs fois par exemple $\exists x$ dans une formule, et ce qui nous intéresse ici c'est rôle du quantificateur à un certain endroit de la formule. Ainsi dans :

(39) $\exists x\, \textbf{mari-de}(x, \mathbf{t_2}) \wedge \exists x[\textbf{aimer}(\mathbf{t_2}, x) \wedge \neg\textbf{mari-de}(x, \mathbf{t_2})]$

$\textbf{mari-de}(x, \mathbf{t_2})$ est la portée de la première occurrence de $\exists x$ et $[\textbf{aimer}(\mathbf{t_2}, x) \wedge \neg\textbf{mari-de}(x, \mathbf{t_2})]$ la portée de sa seconde occurrence.

La quantification, par nature, concerne les variables. Sémantiquement la portée d'un quantificateur c'est, en quelque sorte, son rayon d'action : elle délimite la zone où se trouvent les variables qui sont concernées par ce quantificateur dans une formule. « Concerner » n'est pas un terme retenu en sémantique formelle ; on parle plutôt des **variables liées** par un quantificateur. Et lorsqu'une variable n'est pas liée dans une formule, on dit qu'elle y est **libre**.

Définition 2.15 (Variables libres, variables liées)
1. L'occurrence d'une variable v dans une formule φ est dite **libre** dans φ si elle n'est dans la portée d'aucun quantificateur $\exists v$ ou $\forall v$.
2. Si $\exists v\psi$ (ou $\forall v\psi$) est une sous-formule de φ et si v est libre dans ψ, alors cette occurrence de v est dite **liée** par le quantificateur $\exists v$ (ou $\forall v$).

Là aussi, *libre* et *liée* sont des propriétés d'*occurrences* de variables, c'est-à-dire de variables situées à un certain endroit dans une formule. Regardons par exemple les variables de (40) :

(40) $\forall x[\textbf{aimer}(x, y) \wedge \exists y\, \textbf{elfe}(y)]$

Et examinons les choses pas à pas. Localement dans $\textbf{elfe}(y)$, y est libre puisque dans cette sous-formule il n'y a pas de quantificateur. Donc cette occurrence de y est liée par $\exists y$ dans $\exists y\, \textbf{elfe}(y)$ en vertu de la définition 2.15–2. De même dans $[\textbf{aimer}(x, y) \wedge \exists y\, \textbf{elfe}(y)]$, x et la première occurrence de y sont libres (et la seconde occurrence de y est liée, comme on vient de le voir). Donc x est liée par $\forall x$ dans (40). Par contre, la première occurrence de y, elle, reste libre car elle est dans la portée d'un $\forall x$ mais pas dans celle d'un $\forall y$ ou d'un $\exists y$.

On pourrait se demander pourquoi la définition 2.15 est si compliquée et pourquoi faut-il définir la notion de variable liée à partir de celle de variable libre. Ne suffirait-il pas de dire simplement qu'une variable v est liée par $\exists v$ ou $\forall v$ si elle se trouve dans sa portée ? Eh non, cela ne suffirait pas, car des quantificateurs sur v peuvent se trouver eux-mêmes dans la portée d'un autre quantificateur sur v. Par exemple :

(41) $\forall x[\textbf{aimer}(x, y) \wedge \exists x\, \textbf{elfe}(x)]$

Ici y est libre et le premier x est lié par $\forall x$, comme en (40). Mais le second x, lui, n'est pas lié par $\forall x$, même s'il est dans sa portée. Car il n'est pas libre dans $[\textbf{aimer}(x, y) \wedge \exists x\, \textbf{elfe}(x)]$, il est lié par $\exists x$.

Le principe de la définition 2.15 en fait est qu'une variable v libre dans une (sous-)formule φ est toujours susceptible d'être ensuite liée par un $\exists v$ ou $\forall v$ qui serait placé devant φ. Et il est très important de savoir reconnaître les variables liées, notamment pour l'interprétation de la quantification puisqu'évidemment les quantificateurs quantifient sur les variables qu'ils lient.

Exercice 2.7

Pour chacune des formules suivantes, dites : *i*) quelle est la portée de chaque quantificateur, *ii*) quelles sont les occurrences de variables libres (s'il y en a), et *iii*) et par quels quantificateurs sont liées les autres variables.

1. $\exists x[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \mathbf{\hat{a}ne}(x)]$
2. $\exists x\, \mathbf{aimer}(x,y) \wedge \mathbf{\hat{a}ne}(x)$
3. $\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x,y) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(x)$
4. $\forall x[\exists y\, \mathbf{aimer}(x,y) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(x)]$
5. $\neg\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x,y) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(x)$
6. $\neg\mathbf{\hat{a}ne}(x) \rightarrow [\neg\forall y[\neg\mathbf{aimer}(x,y) \vee \mathbf{\hat{a}ne}(x)] \rightarrow \mathbf{elfe}(y)]$
7. $\neg\exists x[\mathbf{aimer}(x,y) \vee \mathbf{\hat{a}ne}(y)]$
8. $\neg\exists x\, \mathbf{aimer}(x,x) \vee \exists y\, \mathbf{\hat{a}ne}(y)$
9. $\forall x \forall y[[\mathbf{aimer}(x,y) \wedge \mathbf{\hat{a}ne}(y)] \rightarrow \exists z\, \mathbf{mari\text{-}de}(x,z)]$
10. $\forall x[\forall y\, \mathbf{aimer}(y,x) \rightarrow \mathbf{\hat{a}ne}(y)]$

Maintenant intéressons-nous aux conditions de vérité des formules (et des phrases) qui contiennent des quantificateurs. Quand ces formules sont simples, leurs conditions de vérité sont assez faciles à caractériser, et elles nous donnent le principe général d'interprétation de la quantification. Par exemple, la formule $\exists x\, \mathbf{\hat{a}ne}(x)$ est vraie dans un modèle $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, F \rangle$ ssi il y a un individu, au moins, de $\mathcal{A}$ qui appartient à $F(\mathbf{\hat{a}ne})$, l'ensemble des ânes de $\mathcal{M}$. Et $\forall x\, \mathbf{\hat{a}ne}(x)$ est vraie dans $\mathcal{M}$ ssi tous les individus de $\mathcal{A}$ appartiennent à $F(\mathbf{\hat{a}ne})$ (tout le monde est un âne). Et *très* informellement, on généralisera en disant que $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi la formule φ est vraie pour au moins un individu de $\mathcal{A}$ et $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi φ est vraie pour tout individu de $\mathcal{A}$. Ainsi comme avec les autres règles sémantiques de LO l'interprétation se fait par simplification progressive de la formule : on se débarrasse du quantificateur et on examine la dénotation de φ – une fois avec $\exists x$ et autant de fois que nécéssaire avec $\forall x$.

Mais il nous faut ici être précis sur ce que cela signifie lorsqu'on dit qu'une formule φ est *vraie pour tel ou tel individu* de $\mathcal{A}$. D'abord si le quantificateur lie la variable x, on doit regarder les individus qui *en tant que* x rendent vraie la formule. Cela veut dire simplement que les individus à tester doivent en quelque sorte prendre la place de la variable dans la formule φ pour qu'ensuite on vérifie sa dénotation. Mais les individus appartiennent au modèle, pas à LO, ils ne peuvent pas intervenir eux-mêmes dans les formules. C'est pourquoi une manière de procéder consiste à utiliser les constantes comme des représentants des individus dans LO. Le mécanisme interprétatif de la quantification peut alors s'exprimer facilement pour toute formule de LO, il suffit de dire que $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi il y au moins une constante d'individu telle que si on remplace x par cette constante dans φ, φ devient alors vraie dans $\mathcal{M}$, et $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi quand on remplace x successivement par toutes les constantes d'individus, φ est alors à chaque fois vraie dans $\mathcal{M}$.

Cette façon d'interpréter les formules quantifiées n'est pas complètement satisfaisante sur le plan théorique, car elle se débarrasse des variables (en les remplaçant par des constantes) simplement parce que nous ne savons pas ce qu'est $[\![x]\!]^{\mathcal{M}}$ (effectivement nous n'avons jamais défini la dénotation d'une variable dans les règles des définitions 2.11 et 2.12). C'est pourquoi nous verrons au chapitre suivant une autre façon, plus rigoureuse et régulière, d'interpréter la quantification. Cependant, sur le plan pratique, la méthode présentée ici est tout à fait opérationnelle, *à condition* de poser une contrainte particulière sur LO qui est qu'à chaque individu du domaine $\mathcal{A}$ d'un modèle est associée au moins une constante de LO. C'est le cas par exemple dans le modèle-jouet $\mathcal{M}_1$ (p. 63), mais a priori rien n'oblige à ce que cela soit toujours ainsi ; ce serait même peu réaliste tant qu'on assimile les constantes aux noms propres. Mais cette contrainte est nécessaire ici puisque les constantes sont censées jouer le rôle des individus. Disons qu'elle ajoute une propriété formelle au système de LO sans pour autant avoir un impact sur l'interprétation sémantique de la langue naturelle : on considérera que chaque nom propre de la langue se traduit par une constante de LO, mais que toute constante ne traduit pas forcément un nom propre.

Pour formaliser proprement cette méthode d'interprétation par substitution de constantes, on a simplement besoin d'introduire explicitement la procédure de remplacement des variables par des constantes. C'est une opération générale sur la structure des formules, que nous noterons comme suit :

Notation 2.8 (Substitution)
Soit φ une formule de LO, v une variable et t un terme. On note $[t/v]\varphi$ le résultat de la **substitution** dans φ de *toutes les occurrences libres* de v par t.

La substitution ne doit concerner que les occurrences libres de la variable, car elle sera déclenchée par un quantificateur ; et les occurrences libres de x dans φ sont bien celles qui sont liées par $\exists x$ dans $\exists x\varphi$. (42) nous donne un exemple de l'opération[47] :

(42) $[\mathbf{b}/x][\mathbf{\hat{a}ne}(x) \wedge \forall y[\mathbf{aimer}(x,y) \vee \exists x\, \mathbf{mari\text{-}de}(y,x)]]$
$= [\mathbf{\hat{a}ne}(\mathbf{b}) \wedge \forall y[\mathbf{aimer}(\mathbf{b},y) \vee \exists x\, \mathbf{marie\text{-}de}(y,x)]]$

A présent nous pouvons formuler les règles d'interprétation systématiques des formules quantifiées :

Définition 2.16 (Interprétation des formules quantifiées)
(Sem.5) a. $[\![\exists v\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi on trouve (au moins) une constante κ telle que $[\![[\kappa/v]\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

[47] L'opérateur de remplacement noté $[\mathbf{b}/x]$ ne fait pas partie de LO, c'est juste un moyen notationnel qui fait passer d'une formule à une autre.

b. $[\![\forall v\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$ ssi pour toute constante κ, $[\![[\kappa/v]\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$

En somme, ces règles transposent sur des constantes les quantifications qui sont indiquées sur des variables dans les formules ; et comme chaque individu est représenté par une constante, cela revient bien à effectuer les quantifications sur les individus du modèle.

Illustrons l'application de ces règles en calculant la dénotation des formules suivantes par rapport à $\mathcal{M}_1$ (p. 63).

(43) $\exists x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]$

La règle (Sem.5a) nous dit que $[\![\exists x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi il existe une constante κ telle que $[\![\mathbf{elfe}(\kappa) \wedge \mathbf{farceur}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Dans cette écriture, κ n'est qu'une constante virtuelle, et pour montrer que (43) est vraie dans $\mathcal{M}_1$, il suffit donc de trouver une (véritable) constante qui fonctionne en tant que κ. En examinant $\mathcal{M}_1$ on voit qu'on peut prendre par exemple la constante $\mathbf{o}$ (et poser ainsi $\kappa = \mathbf{o}$). En effet $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{o}) \wedge \mathbf{farceur}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, car $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, car $F_1(\mathbf{o}) = \text{Obéron} \in F_1(\mathbf{elfe})$ et $\text{Obéron} \in F_1(\mathbf{farceur})$ (on applique ici les règles (Sem.4a) et (Sem.1a)). On a ainsi montré que $[\![(43)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$: il existe bien un elfe farceur dans $\mathcal{M}_1$.

Le mécanisme d'interprétation est similaire lorsqu'on a plusieurs quantificateurs existentiels :

(44) $\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)$

Toujours selon (Sem.5a), $[\![\exists x \exists y\, \mathbf{aimer}(x, y)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi on trouve une constante κ telle que $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(\kappa, y)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Prenons $\kappa = \mathbf{t_1}$; nous avons donc maintenant à calculer la valeur de $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, y)]\!]^{\mathcal{M}_1}$. Là encore (Sem.5a) nous dit que $[\![\exists y\, \mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, y)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi on trouve une constante κ telle que $[\![\mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, \kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Et là encore, il suffit de trouver une constante qui marche parmi celles dont on dispose. Prenons donc maintenant $\kappa = \mathbf{h_1}$. Et nous avons bien $[\![\mathbf{aimer}(\mathbf{t_1}, \mathbf{h_1})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$, car $F_1(\mathbf{t_1}) = \text{Thésée}$, $F_1(\mathbf{h_1}) = \text{Hippolyta}$ et $\langle \text{Thésée}, \text{Hippolyta} \rangle \in F_1(\mathbf{aimer})$ (cf. p. 63). Nous avons donc trouvé deux constantes qui font l'affaire et cela prouve que $[\![(44)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$: il y a quelqu'un qui aime quelqu'un dans $\mathcal{M}_1$.

Bien sûr, on aurait pu mener cette démonstration en utilisant d'autres constantes, par exemple $\mathbf{l}$ et $\mathbf{h_2}$, ou $\mathbf{d}$ et $\mathbf{h_2}$, ou $\mathbf{h_1}$ et $\mathbf{t_1}$, etc. Si on avait choisi $\mathbf{p}$ pour la première constante (ie pour remplacer x), on n'aurait pas trouvé de seconde constante adéquate pour y, mais cela n'a pas d'importance car pour qu'une formule existentielle soit vraie, il suffit qu'au moins une constante la satisfasse ; peu importe celles qui échouent. L'exercice consiste donc à bien choisir les constantes qui prouvent la vérité de la formule.

Evidemment c'est différent lorsqu'il s'agit de prouver qu'une formule existentielle est fausse ou qu'une formule universelle est vraie. Commençons par calculer la dénotation dans $\mathcal{M}_1$ de l'universelle (45) :

(45) $\forall x[\mathbf{elfe}(x) \rightarrow \mathbf{farceur}(x)]$

La règle (Sem.5b) dit que $[\![\forall x[\mathbf{elfe}(x) \rightarrow \mathbf{farceur}(x)]]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ ssi pour *toutes les* constantes κ, on a $[\![\mathbf{elfe}(\kappa) \rightarrow \mathbf{farceur}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. La démonstration ici est plus longue : il va falloir effectuer le calcul pour $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{o}$, $\mathbf{t_2}$ et $\mathbf{b}$ (donc 11 calculs !). Heureusement la table de vérité de $\rightarrow$ va nous permettre de sauter rapidement des étapes. Souvenons-nous que lorsque l'antécédent d'une implication est faux, alors l'implication entière est vraie, quelle que soit la valeur du conséquent. Or dans les cas où κ est $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$ ou $\mathbf{b}$, on sait que $[\![\mathbf{elfe}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ car aucun des individus dénotés par ces constantes n'est dans $F_1(\mathbf{elfe})$. Donc pour ces huit constantes, on sait tout de suite que $[\![\mathbf{elfe}(\kappa) \rightarrow \mathbf{farceur}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Ce qu'il reste à vérifier, et ce qui est déterminant pour la formule, ce sont les cas où κ est $\mathbf{p}$ ou $\mathbf{o}$ ou $\mathbf{t_2}$ (constantes pour lesquelles $[\![\mathbf{elfe}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$). Et c'est bien normal puisque (45) traduit la phrase « *tous les elfes sont farceurs* » – phrase qui ne s'intéresse qu'aux individus qui sont des elfes. Commençons pas $\mathbf{p}$; $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ car PUCK $\in F_1(\mathbf{farceur})$, et donc $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{p})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. La même démonstration vaut pour $\mathbf{o}$, car OBÉRON $\in F_1(\mathbf{farceur})$, et pour $\mathbf{t_2}$, car TITANIA $\in F_1(\mathbf{farceur})$. Ainsi $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{o}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{o})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_2}) \rightarrow \mathbf{farceur}(\mathbf{t_2})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Donc $[\![\mathbf{elfe}(\kappa) \rightarrow \mathbf{farceur}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ pour toute constante κ, ce qui prouve bien que $[\![(45)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$.

Pour résumer la méthode d'interprétation des formules quantifiées, on peut considérer l'algorithme extrêmement minutieux suivant :

- pour calculer $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$, on passe en revue chaque constante κ, on calcule $[\![[\kappa/x]\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$ et on s'arrête dès qu'on trouve le résultat 1 ; dans ce cas cela montre que $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$; en revanche, si pour tous les κ on a trouvé 0 (ie on a jamais trouvé 1), alors c'est que $[\![\exists x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$;
- pour calculer $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$, on passe en revue chaque constante κ, on calcule $[\![[\kappa/x]\varphi]\!]^{\mathcal{M}}$ et si à chaque fois le résultat est 1, c'est que $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$; au contraire dès qu'on trouve le résultat 0, on peut s'arrêter, car cela suffit à prouver que $[\![\forall x\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$.

Cette procédure nous indique du même coup les « conditions de fausseté » d'une formule quantifiée, ou si l'on préfère, les conditions de vérité de sa négation.

(46) $\exists x[\mathbf{\hat{a}ne}(x) \wedge \mathbf{triste}(x)]$

$[\![(46)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ car *il n'existe pas* de constante κ telle que $[\![\mathbf{\hat{a}ne}(\kappa) \wedge \mathbf{triste}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$. Pour le démontrer très rigoureusement, il faudrait effectuer le calcul pour les onze constantes et montrer que le résultat est toujours 0.

(47) $\forall x[\mathbf{farceur}(x) \rightarrow \mathbf{elfe}(x)]$

$[\![(47)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$ car *il existe au moins une* constante κ telle que $[\![\mathbf{farceur}(\kappa) \rightarrow \mathbf{elfe}(\kappa)]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. Cette constante est $\mathbf{t_1}$, car $[\![\mathbf{farceur}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 1$ et $[\![\mathbf{elfe}(\mathbf{t_1})]\!]^{\mathcal{M}_1} = 0$. En effet, si quelque chose n'est pas vrai de tous les individus, c'est qu'il existe au moins un individu pour lequel c'est faux.

Ces exemples illustrent la dualité bien connue qu'entretiennent entre eux les deux types de quantificateurs : la négation d'une formule existentielle est une formule universelle, et la négation d'une formule universelle est une formule existentielle. Je ne vais pas donner ici le détail de la démonstration, mais nous pouvons facilement nous convaincre de ces équivalences en décortiquant un peu les exemples (46) et (47).

La négation de (46) (ie $\neg\exists x[\mathbf{\hat{a}ne}(x) \wedge \mathbf{triste}(x)]$) signifie qu'il n'existe pas d'individu qui soit à la fois un âne et triste, autrement dit pour tout individu (ou toute constante κ) ou bien ce n'est pas un âne ou il n'est pas triste, ce qui peut se reformuler en : pour tout individu, s'il est un âne, alors il n'est pas triste (tout âne est non-triste). Et cela, ce sont bien les conditions de vérité d'une formule universelle, à savoir :

(48) $\forall x[\neg\mathbf{\hat{a}ne}(x) \vee \neg\mathbf{triste}(x)]$
ou (c'est équivalent)[48] :
$\forall x[\mathbf{\hat{a}ne}(x) \rightarrow \neg\mathbf{triste}(x)]$

Remarquons aussi que (48) (qui équivaut à $\neg$(46)) traduit également la phrase « *aucun âne n'est triste* ». Une phrase en *aucun* s'analyse par une quantification universelle du type (48) ou, ce qui revient au même, par la négation d'une existentielle.

Quant à la négation de (47), c'est-à-dire $\neg\forall x[\mathbf{farceur}(x) \rightarrow \mathbf{elfe}(x)]$, ses conditions de vérité disent qu'il y a au moins un individu qui est farceur mais pas un elfe, ce qui correspond bien à la formule existentielle suivante :

(49) $\exists x[\mathbf{farceur}(x) \wedge \neg\mathbf{elfe}(x)]$

En effet $\neg$(47), « *il n'est pas vrai que tous les farceurs sont des elfes* », veut dire la même chose que « *il y a au moins un farceur qui n'est pas elfe* » (49).

Récapitulons cette dualité entre $\exists$ et $\forall$ par le théorème suivant :

Théorème 2.2
Les quatres paires de formules suivantes sont des équivalences logiques :

1. $\neg\exists x\varphi$ et $\forall x\neg\varphi$
2. $\neg\forall x\varphi$ et $\exists x\neg\varphi$
3. $\neg\exists x\neg\varphi$ et $\forall x\varphi$
4. $\neg\forall x\neg\varphi$ et $\exists x\varphi$

Les deux dernières équivalences se déduisent directement des deux premières et de la loi de double négation vue *supra* dans l'exercice 2.6.

Exercice 2.8
Calculez par rapport à $\mathcal{M}_1$ (cf. p. 63) la dénotation des formules suivantes :

[48] Cf. l'équivalence logique n° 2 dans l'exercice 2.6, p. 68.

1. $\forall x[\mathbf{elfe}(x) \wedge \mathbf{farceur}(x)]$
2. $\forall x[\mathbf{elfe}(x) \rightarrow \neg\mathbf{triste}(x)]$
3. $\neg\exists x[\mathbf{\hat{a}ne}(x) \wedge \mathbf{elfe}(x)]$
4. $\exists x \forall y\, \mathbf{aimer}(y, x)$
5. $\forall y \exists x\, \mathbf{aimer}(y, x)$

Pour chaque formule, proposer une phrase en français qui peut se traduire par cette formule.
Comparer la formule n° 1 avec la formule (45) *supra*.

Pour conclure cette partie sur la quantification, voici en Table 2.7 un petit *vade-mecum* de traduction français–LO de phrases quantifiées typiques. N représente un substantif quelconque et V un verbe intransitif (ou éventuellement un groupe verbal simple) et **n** et **v** représentent les prédicats qui traduisent respectivement N et V.

Un N V Des N V	$\exists x[\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{v}(x)]$
Tout/chaque N V Tous les N V Les N V	$\forall x[\mathbf{n}(x) \rightarrow \mathbf{v}(x)]$
Un N ne V pas Des N ne V pas Pas tous les N ne V Tout/chaque/tous les N ne V pas	$\exists x[\mathbf{n}(x) \wedge \neg\mathbf{v}(x)]$ $\neg\forall x[\mathbf{n}(x) \rightarrow \mathbf{v}(x)]$
Aucun N ne V Tout/chaque/tous les N ne V pas Les N ne V pas	$\neg\exists x[\mathbf{n}(x) \wedge \mathbf{v}(x)]$ $\forall x[\mathbf{n}(x) \rightarrow \neg\mathbf{v}(x)]$

TAB. 2.7 – Schémas de traductions du français en LO

Les formules qui sont dans une même cellule du tableau sont équivalentes, ce sont donc de simples variantes de traduction en LO, cela ne marque pas d'ambiguïté. En revanche, la tournure « tous les N ne V pas » est réellement ambiguë. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

Exercice 2.9 (Quantificateurs et connecteurs)
Indiquez (informellement[49]) les conditions de vérité des formules suivantes :

1. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \wedge \mathbf{gaucher}(x)]$
2. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \vee \mathbf{gaucher}(x)]$
3. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \rightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$
4. $\exists x[\mathbf{homard}(x) \leftrightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$
5. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \wedge \mathbf{gaucher}(x)]$
6. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \vee \mathbf{gaucher}(x)]$
7. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \rightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$
8. $\forall x[\mathbf{homard}(x) \leftrightarrow \mathbf{gaucher}(x)]$

Quelles sont celles qui peuvent être des traductions de phrases simples et naturelles du français ?

[49] C'est-à-dire en français, sans entrer dans les détails techniques.

Il est bon de se souvenir que lorsqu'on traduit des phrases du français (ou de toute autre langue naturelle) il faut toujours s'attendre à ce que $\exists$ aille de paire avec $\wedge$ et $\forall$ avec $\rightarrow$.

2.4.5 Quelques définitions logiques

Nous avons maintenant les moyens formels de définir certaines notions vues dans le chapitre 1.

Notation 2.9 (Satisfaction)
Si une formule φ est vraie dans un modèle $\mathcal{M}$, c'est-à-dire si $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 1$, on dit que φ est **satisfaite** par $\mathcal{M}$, ou encore que $\mathcal{M}$ **satisfait** φ.
On note alors : $\mathcal{M} \models \varphi$.

Attention : le symbole $\models$ est à double emploi. Il exprime soit la satisfaction d'une formule par un modèle, soit la conséquence logique entre des phrases ou des formules que nous avions vue au chapitre 1. En toute rigueur nous devrions utiliser deux symboles différents. D'ailleurs on trouve parfois la variante de notation $\models_{\mathcal{M}} \varphi$ pour exprimer la satisfaction de φ par $\mathcal{M}$. Mais normalement il n'y a pas de confusion à craindre : si on trouve un modèle à la gauche de $\models$, le symbole désigne la satisfaction, si on trouve une ou plusieurs formules, il désigne la conséquence logique.

Dans le chapitre 1, la conséquence logique entre deux phrases (ou deux formules) était définie en disant que dans tous les cas où la première phrase est vraie, la seconde l'est aussi. Maintenant nous savons ce qu'est formellement un *cas* : c'est un modèle. La définition précise se donne donc dans ces termes : $\varphi \models \psi$ si et seulement si dans tous les modèles par rapport auxquels φ est vraie, ψ est vraie aussi.

Définition 2.17 (Conséquence logique)
La formule ψ est une **consequence logique** de la formule φ, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi$ alors $\mathcal{M} \models \psi$.
Plus généralement, ψ est une conséquence logique de l'ensemble de formules $\{\varphi_1 ; \varphi_2 ; \ldots ; \varphi_n\}$, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \models \varphi_1$ et $\mathcal{M} \models \varphi_2$... et $\mathcal{M} \models \varphi_n$ alors $\mathcal{M} \models \psi$.
On note alors : $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Partant, on peut aussi redéfinir les notions de tautologies et de contradiction en termes de modèles. Une tautologie est vraie dans tout modèle et une contradiction dans aucun.

Définition 2.18 (Tautologie)
Une formule φ est une **tautologie**, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi$.
On note alors : $\models \varphi$

Définition 2.19 (Contradiction)
Une formule φ est une **contradiction**, ou est contradictoire, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ (c'est-à-dire $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = 0$).
On note alors : $\models \neg\varphi$

Définition 2.20 (Equivalence logique)
Deux formules φ et ψ sont **logiquement équivalentes**, ou on pourra dire aussi **sémantiquement équivalentes**, ssi pour tout modèle $\mathcal{M}$, $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.
On peut également définir la notion à l'aide de la conséquence logique : φ et ψ sont logiquement équivalentes, ssi $\varphi \models \psi$ et $\psi \models \varphi$.

Enfin terminons avec le théorème suivant :

Théorème 2.3 ($\models$ et $\rightarrow$)
$\varphi \models \psi$ si et seulement si $\models [\varphi \rightarrow \psi]$.

Nous n'allons pas chercher à démontrer ce théorème ici, je le mentionne juste à titre d'entraînement à la lecture et à la manipulation des notions et des symboles que nous avons vus jusqu'ici. Ce théorème montre le rapport qui existe entre la conséquence logique et l'implication matérielle : il dit que ψ est une conséquence de φ si et seulement si $[\varphi \rightarrow \psi]$ est une tautologie ; autrement dit la conséquence logique correspond à une implication *toujours* vraie.

